Éléments de correction

Exercice 1.

(1) Soit A un anneau.

 (a) Soit $I \subset A$ un idéal réel. Montrer que I est un idéal radical.

 (b) Soit X un espace topologique et notons $A = \mathcal{C}^o(X)$ l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs réelles. Montrer qu'un idéal radical de A est réel.

(2) Soit R un corps réel clos et I un idéal réel de $R[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que $\mathcal{Z}(I)$ n'est pas vide.

1(a) Voir cours.

1(b) On souhaite montrer :

$$f_1^2 + \cdots + f_m^2 \in I \implies \forall i, \quad f_i \in I.$$

Fixons i_0. Il suffirait de voir $f_{i_0}^m \in I$ pour un certain m, car I radical. On aimerait donc avoir

$$f_{i_0}^m = ? \times (f_1^2 + \cdots + f_m^2) \qquad \text{avec } ? \in A$$

soit

$$? = \frac{f_{i_0}^m}{f_1^2 + \cdots + f_m^2} \in C^0(X).$$

Or la fonction

$$(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto \frac{x_{i_0}^3}{x_1^2 + \cdots + x_m^2} \quad \text{est continue,}$$

donc ? l'est par composition.

(2) $Z(I) = \emptyset \implies I = R[X_1, \ldots, X_n]$, d'où le résultat (si on suppose I propre, ce que j'avais oublié d'écrire dans l'énoncé).

Exercice 2.

Soit R un corps réel clos. Notons B l'éclatement de R^n à l'origine, donné par

$$B = \{(x_1, \ldots, x_n), [u_1 : \cdots : u_n] \in R^n \times \mathbb{P}^{n-1}(R) : \forall (i,j), \quad x_i u_j = x_j u_i\}.$$

(1) Montrer que l'application $f : B \to \mathbb{P}^n(R)$ donnée par

$$f(x, [u]) = [u_1 : \ldots : u_n : \sum_i x_i u_i]$$

est bien définie et injective.

(2) Déterminer l'image de f.

(3) Montrer que f est un isomorphisme birégulier sur son image.

(1) Bien définie : * au moins un des u_i est non nul.

* si $v = \lambda u$, $\lambda \neq 0$,

$f(x, [u]) = [u_1 : \cdots : \sum x_i u_i] = [\lambda u_1 : \cdots : \sum x_i \lambda u_i]$

$= f(x, [v])$

Injective : si $f(x, [u]) = f(y, [v])$, il est clair que $[u] = [v]$,

puis $u_j \sum_i x_i u_i = u_j \sum_i y_i u_i$

$\sum_i u_i^2 x_j = \sum_i u_i^2 y_j = y_j \sum u_i^2$

$x_j \sum u_i^2$

d'où $x_j = y_j$ car $\sum_i u_i^2 \neq 0$.

(2) $\mathrm{Im} f = \mathbb{P}^n \setminus \{[0 : \cdots : 0 : 1]\}$

(3) On a une bijection, et l'inverse est donnée par des applications régulières.

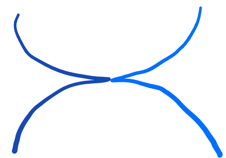
Exercice 3.

(1) Déterminer le lieu singulier de la courbe plane réelle C définie par $y^4 - x^6 = 0$. Dessiner l'allure de C.

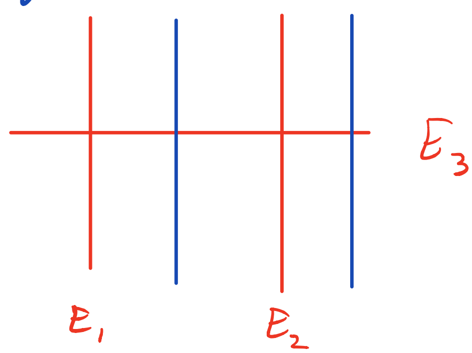
(2) Résoudre les singularités de C. Préciser s'il s'agit d'une résolution plongée. Faire un schéma représentant les diviseurs exceptionnels et transformées strictes.

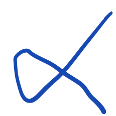
(3) Même questions avec la surface $x^3 + y^2 - x^2z^2 = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

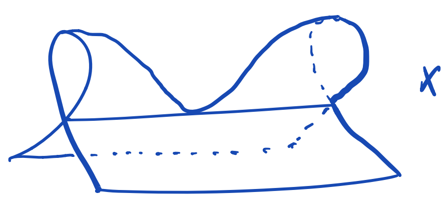
(1) $\operatorname{Sing} C = \{(0,0)\}$



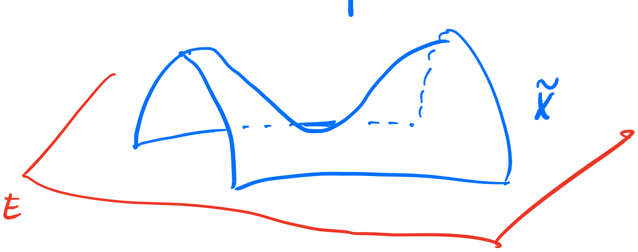
(2) Trois éclatements successifs d'un point mènent à une résolution plongée.



(3) À z fixé on a une cubique de la forme  si $z \neq 0$ et  si $z = 0$. L'allure :



Le lieu singulier est l'axe des z. Éclater cet axe donne une résolution non plongée.
($\tilde{X}$ et E tangent en un point)



Exercice 4.
Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ la variété algébrique réelle définie par $x^2 + y^2 + z^4 = z^2$.

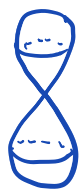
(1) Déterminer le lieu singulier de V. Dessiner l'allure de V.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application polynomiale donnée par $f(u, v, w) = (uw, vw, w)$. Déterminer $f^{-1}(V)$.

(3) Déterminer la ~~poussé en avant~~ tirée en arrière $f^*(\mathbf{1}_V)$ de la fonction constructible $\mathbf{1}_V$.

(4) Déterminer la ~~tirée en arrière~~ poussée en avant $f_*(f^*(\mathbf{1}_V))$ de la poussée en avant de $\mathbf{1}_V$.

(5) On considère l'intersection $A = f^{-1}(V) \cap \{w \geq 0\}$. L'ensemble A est-il semi-algébriquement homéomorphe à un ensemble algébrique réel ?

(1)  $\mathrm{Sing}\, V = \{(0,0,0)\}$

(2) $f^{-1}(V) =$ 

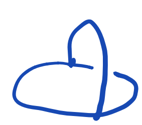
$= S^2 \cup P$

(3) $f^*(\mathbb{1}_V) = \mathbb{1}_{f^{-1}(V)}$

(4) $f_*\left(f^*(\mathbb{1}_V)\right) = \mathbb{1}_V$ car

$$f_*\left(\mathbb{1}_{f^{-1}(V)}\right)(x) = \int_{f^{-1}(x)} \mathbb{1}_{f^{-1}(V)}\, d\chi = \chi\left(f^{-1}(x) \cap f^{-1}(V)\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin V \\ \chi(P) = (-1)^2 & \text{si } x = (0,0,0) = 0 \\ \chi(\text{point}) = 1 & \text{si } x \in V \setminus \{0\} \end{cases}$$

(5) L'entrelac en un point de $S^2 \cap P$ est , et sa caractéristique d'Euler est -1. D'après le théorème de Sullivan, la réponse est donc non.