Université de Rennes 1 *Géométrie algébrique réelle*

Examen du mardi 19 mars 2019

Durée : 2h
Les notes de cours sont autorisées.

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Il suffira de résoudre deux des trois exercices pour avoir une très bonne note.

Exercice 1.

Soit R un corps réel clos.

(1) Soit $I = (X^2 + Y^2 + Z^2) \subset R[X, Y, Z]$. L'idéal I est-il réel ?

(2) (a) Soit $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in R^n$. Montrer qu'il existe des sommes de carrés S, T d'éléments de $R[X_1, \ldots, X_n]$ telles que :

$$(1 + S)^2 f = 1 + T.$$

(b) En déduire que pour un idéal réel I de $R[X_1, \ldots, X_m]$, l'ensemble $\mathcal{Z}(I)$ est non vide si $I \neq R[X_1, \ldots, X_m]$.

Soit $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme irréductible.

(3) Soit C la clôture algébrique de R. Montrer que f est réductible sur $C[X_1, \ldots, X_n]$ si et seulement si f ou $-f$ est une somme de deux carrés dans $R[X_1, \ldots, X_n]$.

(4) Supposons que f change de signe sur R^n. Montrer que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(f)) = (f)$.

Exercice 2.

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ la courbe définie par l'équation $y^2 + x^4(x^4 - 1) = 0$.

(1) Quels sont les points singuliers de C ?

(2) C est-elle compacte ?

(3) Dessiner l'allure de C.

(4) La fonction rationnelle $\frac{y}{x^2}$ peut-elle se prolonger par continuité sur C ? Est-ce une fonction régulière sur C ?

(5) Calculer l'éclatement de $C \subset \mathbb{R}^2$ en l'origine de $\mathbb{R}^2$. La courbe éclatée est-elle non-singulière ?

(6) Déterminer une résolution des singularités de C.

Suite au verso ...

Exercice 3.

(1) Considérons la surface X de $\mathbb{R}^3$, appelée parapluie de Whitney, définie par l'équation $x^2 = y^2 z$.

(a) Quels sont les points singuliers de X ?

(b) Dessiner l'allure de X.

(c) Exprimer la fonction caractéristique $\mathbf{1}_X$ de X sous la forme d'une somme finie

$$\mathbf{1}_X = \sum_i (f_i)_*(\mathbf{1}_{W_i})$$

où les W_i sont des ensembles algébriques lisses et les $f_i : W_i \to X$ sont des applications régulières propres.

(d) Soit Λ l'opérateur entrelacs défini pour les fonctions constructibles sur $\mathbb{R}^3$. Calculer $\Lambda \mathbf{1}_X$.

(e) Considérons le sous-ensemble semi-algébrique B de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$B = X \cap \{z \geq 0\}.$$

Est-ce que B est semi-algébriquement homéomorphe à un ensemble algébrique réel ?

(2) Soit S un ensemble semi-algébrique réel. On note toujours Λ l'opérateur entrelacs défini sur l'anneau $F(S)$ des fonctions constructibles sur S. Démontrer que $\Lambda \circ \Lambda = 2\Lambda$.