

Correction du contrôle continu 2

Connaissances élémentaires (2 points)

L'aire cherchée est donnée par l'intégrale $\int_1^2 x^2 dx = [x^3/3]_1^2 = 8/3 - 1/3 = 7/3$.

Questions de cours. Voir le cours.

- Exercice 1.**
1. Vrai. Cet ensemble est égal à $f^{-1}(]-\infty, 2])$ où f est la fonction polynomiale définie par $f(x, y, z) = x^2 + xyz^3 - y^2z$. Le résultat se déduit alors de la continuité de f est du fait que l'intervalle $]-\infty, 2]$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
 2. Faux. On a $g(x, 0) = 1$ si $x \neq 0$, alors que $g(0, y) = 0$ si $y \neq 0$, donc la fonction g n'admet pas de limite en $(0, 0)$.
 3. Faux, il est égal à $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

- Exercice 2.**
1. Oui. En effet, f est le quotient de deux fonctions polynomiales, donc continues, avec le dénominateur qui ne s'annule pas en dehors de $(0, 0)$, donc f est continue en dehors de $(0, 0)$. De plus f est continue en $(0, 0)$ car la limite de f en $(0, 0)$ existe et vaut 0. En effet

$$|f(x, y)| \leq |xy| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |xy|$$

et le terme de droite tend vers 0 quand le couple (x, y) tend vers 0.

2. En dehors de $(0, 0)$, la fonction f admet des dérivées partielles comme quotient de fonctions polynomiales (le dénominateur ne s'annulant pas) et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En $(0, 0)$ on revient à la définition, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

3. Oui, car f est de classe C^1 et toute fonction de classe C^1 est différentiable. Montrons que f est bien de classe C^1 . Les majorations

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq |y| + 3|y|$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |x| + |x|$$

impliquent que les dérivées partielles sont bien continues en $(0, 0)$. Elles le sont en dehors de $(0, 0)$ comme quotients de fonctions polynomiales, avec un dénominateur qui ne s'annule pas en $(0, 0)$.

Exercice 3. 1.

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 3\pi^2/4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Les dérivées partielles premières et secondes de f existent par composition de fonctions de classes C^2 . On obtient en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les formules

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x + g(y)),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g'(y)f'(x + g(y))$$

et donc

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x + g(y)),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = g'(y)f''(x + g(y)).$$

Ainsi

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

est égal à

$$f''(x + g(y))g'(y)f'(x + g(y)) - g'(y)f''(x + g(y))f'(x + g(y)) = 0.$$