Contrôle continu 1

Durée : 1h. Les documents et calculatrices sont interdits.

Connaissances élémentaires

Si x est la quantité initiale, après augmentation de 10% on obtient $y = (1 + \frac{10}{100})x = 1,1x$, puis près diminution de 10% on a finalement $z = (1 - \frac{10}{100})y = 0,9y = 0,9 * 1,1x = 0,99x$, ce qui est différent de x dès que x est non nul.

Questions de cours

Voir le cours.

Exercice 1. 1. Voir le cours.

2. Soit $x \in]1,5[$ et posons $r = \min\{x-1, 5-x\}$. Alors $r > 0$ et $]x-r, x+r[$ est inclus dans $]1,5[$. En effet, si y est dans $]x-r, x+r[$, alors par l'inégalité triangulaire $|y-3| \leq |y-x| + |x-3|$. Or $|y-x| < r$ et donc si $r = x-1$, on obtient alors $|x-3| = 3-x$ et donc $|y-3| < x-1+3-x = 2$, alors que si $r = 5-x$ il vient $|x-3| = x-3$ et donc $|y-3| < 5-x+x-3 = 2$.
3. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in E$ et posons $r = 2 - ||X_0 - (2,-3)||$. Déjà $r > 0$ car
$$||X_0 - (2,-3)|| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} < \sqrt{4} = 2.$$
Montrons que la boule de centre X_0 et de rayon r est incluse dans E. Soit $X = (x,y)$ un point de cette boule $B(X_0, r)$. D'après l'inégalité triangulaire
$$||X - (2,-3)|| \leq ||X - X_0|| + ||X_0 - (2,-3)||,$$
d'où
$$||X - (2,-3)|| < r + ||X_0 - (2,-3)|| = 2.$$
Ainsi $X \in E$ et donc $B(X_0, r) \subset E$. Ainsi E est ouvert.

Exercice 2. 1. Le numérateur est défini sur $\mathbb{R}^2$ car il est composée de fonctions polynomiales et du cosinus qui est définie sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur est aussi définie sur $\mathbb{R}^2$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x^2 + y^4 + 2 \geq 2$. De plus le dénominateur ne s'annule pas donc f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les fonctions de deux variables $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto xy^2$ et $(x,y) \mapsto x^2 + y^4 + 2$ sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$. Alors la fonction $(x,y) \mapsto \cos(xy^2)$ est continue par composition avec la fonction *cosinus* qui est continue sur $\mathbb{R}$, et donc le

numérateur de f est continu par produit de fonctions continues. Le dénominateur est lui continu par composition d'une fonction continue à valeurs dans $[2, +\infty[$ avec la fonction ln qui est continue sur $]0, +\infty[$. Comme de plus le dénominateur ne s'annule pas, f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient de fonctions continues.

Exercice 3. 1. Si $a \in \mathring{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Or $A \subset B$ donc $B(a, r) \subset B$ et donc a est dans $\mathring{B}$.

La réciproque est fausse, prendre $A = [0, 1]$ et $B =]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fermeture $\overline{A \cap B}$ de l'intersection de A et de B est incluse dans l'intersection $\overline{A} \cap \overline{B}$. Que dire de la réciproque ?

   Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Si x $A \cap B$, alors x est dans $\overline{A} \cap \overline{B}$ car $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$. Sinon, pour tout rayon $r > 0$, la boule $B(x, r)$ contient à la fois des points de $A \cap B$ et de $(A \cap B)^c$. Si $B(x, r)$ ne contient que des points de A, alors x est dans l'intérieur de A donc dans $\overline{A}$. Sinon $B(x, r)$ contient à la fois des points de A et de son complémentaire, donc x est dans $\overline{A}$. On raisonne de même avec B pour montrer que x est aussi dans $\overline{B}$, et donc dans l'intersection $\overline{A} \cap \overline{B}$.

   La récirpoque est fausse, prendre $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$ dans $\mathbb{R}$.