Devoir maison 1 : correction

Exercice 1. D'après l'inégalité triangulaire, on a $||x-t|| \leq ||x-y|| + ||y-t||$ mais aussi $||x-t|| \leq ||x-z|| + ||z-t||$. De même, on a $||y-z|| \leq ||y-x|| + ||x-z||$ et aussi $||y-z|| \leq ||y-t|| + ||t-z||$. En sommant ces quatre inégalités on obtient

$$2||x-t||+2||y-z|| \leq ||x-y||+||y-t||+||x-z||+||z-t||+||y-x||+||x-z||+||y-t||+||t-z||$$

Or pout tout vecteur v on a $||v|| = ||-v||$, donc le membre de droite est égal à

$$2(||x-y|| + ||y-t|| + ||t-z|| + ||z-x||).$$

En divisant l'inégalité obtenue par 2, on obtient le résultat.

Exercice 2. Les ensembles D_n sont des disques fermés centrés au point $(1/n, 1/n)$ et de rayon $|a|/n$. Supposons par la suite a positif. Quand n devient grand, les disques se rapprochent de l'origine, mais il se peut que l'origine n'appartienne à aucun D_n. En effet le point $(0,0)$ est dans D_n si et seulement si $2 \leq a^2$, ou encore si et seulement $a \geq \sqrt{2}$ (puisqu'on a supposé a positif).

On va donc distinguer ces deux cas. Supposons donc d'abord $a < \sqrt{2}$. Si D était fermé, la suite de terme général $(1/n, 1/n)$, qui est contenu dans D et qui converge vers $(0,0)$, devrait avoir sa limite dans D. Comme $(0,0)$ n'est pas dans D, c'est que D n'est pas fermé.

Supposons maintenant $a \geq \sqrt{2}$. On va montrer que sous cette condition, tous les ensembles D_n sont inclus dans D_1. Or D_1 étant un disque fermé (voir la démonstration du cours ou celles faites en TD), on aura donc $D = D_1$ est fermé. Montrons donc que $D_n \subset D$ pour tout entier n non nul. Pour cela, prenons $X = (x,y) \in D_n$ et montrons $X \in D_1$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$||X - (1,1)|| \leq ||X - (1/n, 1/n)|| + ||(1/n, 1/n) - (1,1)||.$$

Or $||X - (1/n, 1/n)|| \leq a/n$ car $X \in D_n$ et

$$||(1/n, 1/n) - (1,1)|| = \sqrt{2(1-1/n)^2} = \sqrt{2}\frac{n-1}{n}.$$

On obtient donc le résultat cherché si $a/n + \sqrt{2}\frac{n-1}{n} \leq a$, ou encore si $(\sqrt{2}-a)\frac{n-1}{n} \leq 0$. Or c'est le cas par hypothèse sur a, et donc $||X-(1,1)|| \leq a$, ce qui signifie que X est dans D_1.

Exercice 3. 1. Soit (a_n, b_n) une suite convergeant vers (a,b). Alors les suites réelles (a_n) et (b_n) convergent vers a et b. Par continuité de f, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$, et par continuité de g la suite $(g(b_n))$ converge vers $g(b)$. La suite somme $(f(a_n) + g(b_n))$ converge donc vers la somme des limites $f(a) + g(b)$. Dit autrement la suite $(h(a_n, b_n))$ converge vers $h(a,b)$, ce qui montre la continuité de h au point (a,b).

2. La réciproque est vraie. En effet si $a \in \mathbb{R}$, et si la suite (a_n) converge vers a, alors la suite $(h(a_n, 0))$ converge vers $h(a, 0) = f(a)+g(0)$ par continuité de h. Par différence, la suite $(h(a_n, 0) - g(0)) = (f(a_n))$ converge vers $f(a)$, ce qui montre la continuité de f en a. On fait de même avec g : soit $b \in \mathbb{R}$ et (b_n) une suite convergeant vers b. Alors la suite $(h(0, b_n) - f(0))$ converge vers $h(0, b) - f(0)$, ou dit autrement la suite $(g(b_n))$ converge vers $g(b)$.

Exercice 4. 1. D'après le cours il suffit de montrer que les deux fonctions f_1 et f_2 définie par $f = (f_1, f_2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$. Concernant f_2, elle est polynomiale sur l'ensemble où y ne s'annule pas, donc est continue. Soit $(a, 0, c)$ un point où la seconde coordonnée s'annule. Pour montrer que f_2 est continue en $(a, 0, c)$, on doit voir que la limite de $f_2(x, y, z)$ est égale à c lorsque (x, y, z) tend vers $(a, 0, c)$. Or

$$|f_2(x, y, z) - c| \leq \max\{|z - c|, |z + y^2 - c|\}$$

et les deux termes de droites tendent vers 0 quand (x, y, z) tend vers $(a, 0, c)$, donc leur maximum aussi. Ainsi f_2 est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Par contre on va montrer que f_1 n'est pas continue en tout point où $y = 0$. Notons déjà que f_1 est continue dès que $y \neq 0$. En effet la fonction de trois variables réelles $(x, y, z) \mapsto x$ est polynomiale donc continue, et par composition avec la fonction sinus qui est continue sur $\mathbb{R}$ la fonction $(x, y, z) \mapsto \sin x$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^3$. De même la fonction $(x, y, z) \mapsto y$ est continue, et leur quotient est aussi continu sur $\mathbb{R}^3$ puisque le dénominateur ne s'annule pas.

Soit maintenant un point $(a, 0, c)$ où la seconde coordonnée s'annule. On va montrer que la limite de f_1 quand (x, y, z) tend vers $(a, 0, c)$ n'est pas égale à a. Si elle était égale à a, pour toute suite (x_n, y_n, z_n) tendant vers $(a, 0, c)$, la suite réelle $(u_n) = (f_1(x_n, y_n, z_n))$ tendrait aussi vers a.

Choisissons $x_n = a + 1/n, y_n = 1/n^3$ et $z_n = c$. Déjà si $a \neq 0$, la suite $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$. Si $a = 0$, on a alors $u_n = n\frac{\sin 1/n}{1/n}$. Or la suite $(\frac{\sin 1/n}{1/n})$ converge vers 1 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Dans tous les cas f_1 n'est pas continue en $(a, 0, c)$.

2. Les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont polynomiales donc continues. La fonction sinus étant continue sur $\mathbb{R}$, la composition $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$, et donc par produit le numérateur de g est continu. De même le dénominateur de g est continu sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale. En conséquence, la fraction g est continue là où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire en dehors de $(0, 0)$.

   Pour l'étude au point $(0, 0)$, on va montrer que la limite de g en $(0, 0)$ est égale à $g(0, 0) = 0$. On utilisera l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$ pour t petit (par exemple $|t| \leq 1$). Ainsi, si $|x|$ et $|y|$ sont plus petits que 1, on a donc

$$|g(x, y)| = |\frac{x\sin(xy)}{x^2 + y^2}| \leq |\frac{x^2y}{x^2 + y^2}| \leq |\frac{(x^2 + y^2)y}{x^2 + y^2}| \leq |y|$$

   qui tend bien vers 0 quand le couple (x, y) tend vers $(0, 0)$.

   Ainsi g est continue en $(0, 0)$ aussi, et donc g est continue sur $\mathbb{R}^2$.