Feuille 6

1 À savoir faire

Exercice 1. Dessiner les régions suivantes :

(a) $\{(x, y) \mid x + y \leqslant 1 \ , \ x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0\}$

(b) $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$

(c) $\{(x, y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant x \ , \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

2 À faire

Exercice 2. Calculer les intégrales doubles suivantes :

(a) $\iint_R xy(x + y)\ dxdy \qquad R : [0, 1] \times [0, 1]$

(b) $\iint_R \sin(x + y)\ dxdy \qquad R : [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$

(c) $\int_0^\pi \int_0^x x \sin y\ dydx$

(d) $\iint_R x \cos(x + y)\ dxdy$, R région triangulaire de sommets à $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π).

(e) $\iint_R x^2\, dxdy$ lorsque $R = \{(x, y) \mid x \geqslant 0 \ , \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$

(f) $\iint_D \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^3}\ dx\ dy$, $D = \{(x, y) \mid 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

(g) $\iint_S xy^2\ dx\ dy$ où S est limité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p$

(h) $\iint_S (x^2 + y^2)\ dx\ dy$ où le domaine d'intégration S est limité par le demi-cercle de rayon a et de centre (0,0), et situé au-dessus de l'axe des x

(i) $\iint_D \dfrac{dx\ dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a\}$

Exercice 3. Calculer l'aire de la région du plan décrite par $\{(x, y) \mid y \leqslant x \leqslant y^2 \ , \ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Exercice 4. Écrire le carré de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ comme une intégrale sur le plan et passer en coordonnées polaires. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 5. On considère $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - y^2)^{1/2} dy\ dx$.

1. Décrire la région sur laquelle on intègre.
2. Échanger l'ordre d'intégration et évaluer.

Exercice 6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^1 dz\, dy\, dx$. Décrire la région sur laquelle on intègre.

Exercice 7. Calculer les intégrales triples suivantes

1. $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$ où V est la boule de centre (0,0,0) et de rayon R.
2. $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x,y,z) \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$

3 Pour chercher

Exercice 8. Prendre un rectangle dans $\mathbb{R}^2$ (resp. un pavé dans $\mathbb{R}^3$) une matrice 2×2 (resp. 3×3) et calculer l'aire (resp. le volume) de l'image du rectangle (resp. du pavé) par l'application définie par la multiplication par la matrice.