Feuille 5

1 Extrema

1.1 À savoir faire

Exercice 1. Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{4x}{2+x^2}$.

Exercice 2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et vaut $f(0)$. Montrer que f atteint au moins un de ses extrema globaux.

Exercice 3.
1. Soient x et y deux nombres réels strictement positifs dont le produit est constant. Déterminer si leur somme passe par un extremum.
2. Soient x et y deux nombres réels positifs dont la somme est constante. Déterminer si leur produit passe par un extremum.

1.2 À faire

Exercice 4. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :
(1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
(2) $f(x, y) = xy + ln(1 + y)$.
(3) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$.
(4) $f(x, y) = ae^{-x} + be^{-y} + ce^{x+y}$ avec $a, b, c > 0$.
(5) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$ pour $x > 0$, $y > 0$ et $a > 0$. Montrer que le minimum est global.

Exercice 5. Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas d'extremum local en $(0, 0)$:
1. $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$,
2. $(x, y) \mapsto x(x^2 + y^2 - 2x)$.

Exercice 6. Déterminer tous les extrema locaux et globaux ainsi que les points de selle de la fonction $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x, y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1 \;,\; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 7. Déterminer la borne supérieure de la fonction $(x, y) \mapsto 3xy - 3x^2 - y^3$ sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 8. Considérer la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.
1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
2. Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x, y) \mid -2 \leqslant x, y \leqslant 2\}$.

2 Extrema liées

Exercice 9. La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x, y, z) = 2 + xz + y^2$.
Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 10. Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres} \quad a_i \geqslant 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1\,, \ldots, \, x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0$: $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?
2. Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 11. Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x+z$ sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 12. Trouver le minimum de la fonction $\sum_{i=1}^{d} x_i$ pour $x \in \mathbb{R}_+^d$ avec $\prod_{i=1}^{d} x_i = 1$.

2.1 Pour chercher

Exercice 13. Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M d'un triangle ABC aux trois côtés du triangle.

Exercice 14. Déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x, y, z) = xy+yz+zx$, sachant que $x + y + z = 1$.