Feuille 4

1 Différentiabilité

1.1 À savoir faire

Exercice 1. Soit $g(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$. Calculer $g'(0)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g(x, y) = f(x - y,\, y - x)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

1.2 À faire

Exercice 3. 1) Posons $f(x, y, z) = 2x^3y - 2ye^z + x - 2y^2$. Calculer le gradient de f.
2) Posons $g(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de g.
3) Posons $F(t) = f(g(t)) = f(t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de F.

Exercice 4. Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u, v) = u^2 - v^2,\ y(u, v) = uv - v,\ z(u, v) = v^2 + u \quad et \quad f(x, y, z) = x^2 - xy - 3z^2.$$

Posons $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(1, 1) = 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(1, 1) = 5$.
Calculer $g'(0)$ lorsque $g(t) = f(2t + t^2 + e^t\ ,\ \sin t + \cos t)$.

Exercice 6. On appelle fonction homogène d'ordre α toute fonction vérifiant $f(\lambda x\, ,\ \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$, $\forall \lambda > 0$.
Montrer que $f(x, y)$ homogène vérifie l'identité d'Euler : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Exercice 7. Trouver les points critiques de :

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

(b) $f(x, y) = x\, e^y$

Exercice 8. Trouver l'équation du plan tangent à la surface donnée par le graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$ au point (a,a,0).

Exercice 9. Trouver l'équation du plan tangent à la surface $S = \{(x, y, z) \,|\, xyz = 1\}$ en $(2, 1, \frac{1}{2})$.

1.3 Pour chercher

Exercice 10. Soit $h(x) = g(f(x))$ avec $f = (f_1 \,, \ldots \,, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;,\; g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Montrer que $\nabla h(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(y)\, \nabla f_k(x) \;,\; y = f(x)$.

Exercice 11. Considérons les sphères $S_1 : (x-c)^2+y^2+z^2 = 3$ et $S_2 : x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$. Trouver une valeur de c pour laquelle, à tout point d'intersection de S_1 et S_2, les plans tangents sont orthogonaux.

Exercice 12. Trouver tous les points P sur la surface $S : 2x^2 - y^2 + z^2 = 25$ pour lesquels le plan tangent T_pS est orthogonal à l'axe Oz.

2 Inversion locale

2.1 À savoir faire

Exercice 13. Montrer que la relation $e^{x-y} = 1 + x + y$ définit implicitement une fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de l'origine.

Exercice 14. Montrer que la relation $Arctan(xy) = e^{x+y} - 1$ définit implicitement une fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de l'origine.

2.2 À faire

Exercice 15. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}$ où φ est la fonction de l'exercice 13.

Exercice 16. Déterminer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de la fonction φ de l'exercice 14.

Exercice 17. Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = (x^2 - y^2 \,, 2xy)$ soit localement inversible.

Exercice 18. Montrer que $f(x, y) = x\, e^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1, 0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

2.3 Pour chercher

Exercice 19. Considérons la fonction $f(u, v) = (x, y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.
1. Déterminer en quels points cette fonction est localement inversible.
2. Nous observons que $f(1, 2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que f est localement inversible en $(1, 2)$. Dans un voisinage de $(u, v) = (1, 2)$ on peut donc écrire $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$. Donner les valeurs de $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ au point $(\frac{3}{2}, 2)$.