Feuille 1

Exercice 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer les identités suivantes :

(a) $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\ (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

(b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\ (\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Exercice 2. Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $A = (1, 2, -1)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1, -1, 3)$.

Exercice 3. Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par les trois points suivants : $(2, -1, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$.

Exercice 4. Calculer l'angle entre les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 5. Donner les coordonnées polaires des points de coordonnées cartésiennes suivantes : $(1, 1)$, $(0, -1)$, $(3, 1)$, $(2, -3)$, $(-1, -3)$.
Donner les coordonnées sphériques des points de coordonnées cartésiennes suivantes : $(1, 1, 1)$, $(0, -2, 0)$, $(-1, -3, -1)$.

Exercice 6. Dessiner les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(x, y) \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}$

(b) $\{(x, y) \mid |x| + |y|) < 1\}$

(c) $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$

(d) $\{(x, y) \mid 0 \leq y < x^2\}$

(e) $\{(x, y) \mid \sin y \leq x < 2\}$

Exercice 7. Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels. Pour tout nombre réel t, on considère la partie E de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$E_t = \{(x_1, \dots, x_n)\ /\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = t\}.$$

Montrer que si les a_i ne sont pas tous nuls alors, pour tout t, l'ensemble E_t est un fermé non vide d'intérieur vide. Que se passe-t-il lorsque les a_i sont tous nuls ?

Exercice 8. Montrer en utilisant la définition que les ensembles suivants sont ouverts (dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) :

(a) $]-1, 1[$

(b) $\{(x, y) \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 2\}$

(c) $\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}$

(d) $]0,1[^3$

Exercice 9. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ?

(a) $\{(x,y) \mid |x| < 1 \ \text{ et } \ |y| < 1\}$
(b) $\{(x,y) \mid xy \leq 1\}$
(c) $\{(x,y) \mid y > x^2 \ \text{ et } \ 0 \leq |x| < 2\}$
(d) $\{(x,y) \mid x > y\}$

Exercice 10. Donner l'intérieur, l'extérieur et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$
(b) $\left\{\left(x \ , \ \sin\dfrac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$
(c) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$
(d) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$

Exercice 11. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que ∂X est fermé.

Exercice 12. Montrer qu'une réunion quelconque d'ensemble ouverts est un ensemble ouvert. Montrer qu'une intersection finie d'ensemble ouverts est un ensemble ouvert. Donner un exemple d'une intersection (infinie) d'ensembles ouverts qui ne soit pas ouverte.

Exercice 13. Lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$) sont compacts ?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
(b) $[0 \ , +\infty[$
(c) l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{ et } \ y = x^2\}$
(g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1 \ \text{ et } \ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}\right\}$

Exercice 14. Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ compacts. Montrer que $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont compacts. Une réunion finie de sous-ensemble compacts de $\mathbb{R}^n$ est-elle encore compacte ? Et une réunion infinie ?

Exercice 15. Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une limite dans K.

Exercice 16. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compacts. Montrer que $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est compact.