Devoir maison 2

À rendre la semaine du 3 novembre 2014

Exercice 1. Étudier la courbe paramétrée $t \mapsto (f(t), g(t))$ définie par $f(t) = t - \sin t$ et $g(t) = 1 - \cos t$.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles, leur continuité et la différentiabilité :

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

À quelle condition sur f l'application g admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit f une fonction d'une variable et g la fonction de deux variables définie par $g(x,y) = f(\frac{y}{x})$.
Le but de l'exercice est de trouver f pour que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

(1) Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction des dérivés de f.
(2) Posant $t = \frac{y}{x}$, en déduire l'équation différentielle vérifiée par f.
(3) Résoudre cette équation différentielle.
(4) Conclure.