

Examen du 19 décembre 2017; 16h30-18h30

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.

On justifiera soigneusement tous les résultats énoncés.

Questions de cours

- (1) Donner la définition d'une norme matricielle.
- (2) Donner une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R} .

Exercice 1. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (1) Rappeler pourquoi la matrice tAA est diagonalisable en base orthonormée.
- (2) Calculer la décomposition polaire de A .

Exercice 2. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -18 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer les polynômes caractéristiques et minimaux de A, B, C et D .
 - (2) Parmi les matrices A, B, C et D , lesquelles sont diagonalisables ?
 - (3) (a) Quelle(s) matrice(s) parmi A, B et D est/sont semblable(s) à C ?
(b) Quelle(s) matrice(s) parmi A, B et C est/sont semblable(s) à D ?
 - (4) Déterminer A^n pour tout n dans \mathbb{N} .
- bonus (5) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 2$ et $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une formule exprimant u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit A la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer le spectre de A ainsi que son rayon spectral.
- (2) Démontrer que A est une matrice irréductible.
- (3) Est-ce que A est primitive ?
- (4) La suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 4. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Le système linéaire $AX = B$ admet-il une solution dans \mathbb{R}^2 ?
 - (2) Donner la décomposition LU de la matrice $\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.
- bonus (3) Résoudre le système $AX = B$ au sens des moindres carrés.