

Examen de seconde session

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.

On justifiera soigneusement tous les résultats énoncés.

Questions de cours

- (1) Donner la définition d'une matrice diagonalisable.
- (2) Donner un exemple de matrice $M_3(\mathbb{R})$ triangularisable mais pas diagonalisable.
- (3) Donner un exemple de matrice irréductible non primitive.

Exercice 1. Soit H l'hyperplan de \mathbb{R}^3 défini par l'équation $x + 2y - z = 0$.

- (1) Calcul l'orthogonal H^\perp de H .
- (2) Donner une base \mathcal{B} orthonormée de H^\perp .
- (3) Calculer la base duale de \mathcal{B} .

Exercice 2. Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Quel est le polynôme caractéristique de A ? Quel est son polynôme minimal ?
- (2) La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? Est-elle triangularisable sur \mathbb{R} ?
- (3) Calculer e^A .

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice de rayon spectral strictement plus petit que 1.

- (1) Montrer que $I_n - A$ est inversible.
- (2) Calculer l'inverse de $I_n - A$.
- (3) Donner un exemple d'une telle matrice A qui n'est pas diagonalisable.