Examen de seconde session

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.
On justifiera soigneusement tous les résultats énoncés.

Questions de cours

(1) Donner un exemple de matrice irréductible mais non primitive.
(2) Donner la définition d'une matrice symétrique définie positive.

Exercice 1. Soit D le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations $x+2y-z=0$ et $2x+y+z=0$.

(1) Calcul l'orthogonal $D^\perp$ de D.
(2) Donner une base $\mathcal{B}$ orthonormée de $D^\perp$.
(3) On ajoute le vecteur $(1,0,0)$ à $\mathcal{B}$. La famille obtenue est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, calculer sa base duale.

Exercice 2. Soit A la matrice la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est $(X-2)^4$, et le polynôme minimal est $(X-2)^3$.

(1) Est-ce que B est diagonalisable ?
(2) Démontrer que la forme de Jordan J de B est

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Calculer l'exponentielle de J.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ et $|||A|||_2$.
(2) Donner la décomposition polaire de A.