

Examen du 19 décembre 2018; 14h-16h

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.

On justifiera soigneusement tous les résultats énoncés.

Questions de cours

- (1) Donner un exemple de matrice symétrique définie positive de taille 3.
- (2) Donner l'énoncé du théorème de Perron.

Exercice 1. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs colonnes de la matrice A .
- (2) En déduire la décomposition QR de A .

Exercice 2. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

dont la seule valeur propre (y compris complexe) est 2.

- (1) En déduire le polynôme caractéristique de B .
- (2) Calculer le polynôme minimal de B .
- (3) Justifier que B est inversible. Exprimer B^{-1} comme un polynôme en B .
- (4) Est-ce que B est diagonalisable ?
- (5) Quelle est la forme de Jordan de B ?

Exercice 3. Soit A la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Est-ce que A est irréductible ?
- (2) Est-ce que A est primitive ?

Exercice 4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Le système linéaire $AX = B$ admet-il une solution dans \mathbb{R}^3 ?
- (2) Donner la décomposition LU de la matrice tAA .
- (3) Résoudre le système $AX = B$ au sens des moindres carrés.