Feuille de travaux dirigés 7

1. Autour du pivot de Gauss

Exercice 1.1. Résoudre le système $Ax = b$, la décomposition LU de A étant donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad et \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.2. Donner la décomposition LU des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.3. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Est-ce que A admet une décomposition LU ?

(2) Montrer que la décomposition LU de la matrice obtenue en permutant les lignes 1 et 2 de la matrice A s'écrit $PA = LU$, où P est une matrice élémentaire. Déterminer P, L et U.

(3) Résoudre le système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ à l'aide de la décomposition $PA = LU$.

Exercice 1.4. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Est-ce que A admet une décomposition LU ? Si non, trouver une matrice inversible P telle que PA admette une décomposition LU, et calculer la.

Exercice 1.5. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Moindres carrés

Exercice 2.1. Résoudre au sens des moindres carrés les systèmes $AX = B$ suivants. La solution trouvée est-elle unique ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2. Résoudre les systèmes linéaires $AX = B$ suivants, exactement ou au sens des moindres carrés. Dans le second cas, justifier le cas échéant l'unicité de la solution.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3. En appliquant la méthode des moindres carrés, trouver la droite de régression (de y par rapport à x) approchant le nuage de points suivant :

a) $(2,5),(3,9),(4,15),(5,21)$ *b)* $(4,3),(15,16),(30,13),(100,70),(200,90)$

3. Valeurs singulières

Exercice 3.1. Donner la décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer un pseudo inverse de A, B et C.

Exercice 3.2. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que $|||A|||_2$ est la plus grande valeur singulière de A.
(2) Montrer que $\mathrm{Cond}_2(A)$ est le quotient de la plus grande valeur singulière de A par la plus petite valeur singulière de A.
(3) Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$ où les σ_i sont les valeurs singulières de A.
(4) Les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrés des valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$.
(5) Supposons $n = m$, alors
  (a) $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$.
  (b) Si A est symétrique, alors les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A.