Feuille de travaux dirigés 7

1. Autour du pivot de Gauss

Exercice 1.1. Résoudre le système $Ax = b$, la décomposition LU de A étant donnée par

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U}, \qquad et \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Notons $L, U \in GL_3(\mathbb{R})$.

On résout

$$\begin{cases} LY = b & (1) \\ UX = Y & (2) \end{cases}$$

Pour (1) :

$$LY = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 6 - 2y_1 = 4 \\ y_3 = 6 + y_1 - 2y_2 = 6 + 1 - 8 = -1 \end{cases}$$

Pour (2) :

$$UX = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}(4 - x_3) = 1 \\ x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_2 + 2x_3) = 1 \end{cases}$$

Ainsi l'unique solution de $AX = b$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

déjà triangulaire inf. mais pas que des 1 sur la diagonale...

Exercice 1.2. Donner la décomposition LU des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour A :

On ajoute à L_2 la ligne L_1. Matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{U}$$

Pour B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}}_{U}$$

Alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \end{pmatrix} U$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} U$$

Résultats

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/9 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

et $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.3. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Est-ce que A admet une décomposition LU ?
(2) Montrer que la décomposition LU de la matrice obtenue en permutant les lignes 1 et 2 de la matrice A s'écrit $PA = LU$, où P est une matrice élémentaire. Déterminer P, L et U.
(3) Résoudre le système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ à l'aide de la décomposition $PA = LU$.

(1) Non car le premier mineur principal est nul.

(2) Avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $PA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On peut alors appliquer la décomposition LU à PA car les mineurs principaux de PA sont non nuls. (en particulier A est inversible)

On obtient

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LU$$

(3) P étant inversible, ce système est équivalent à $PAx = P\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On résout alors

$$\begin{cases} Ly = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ Ux = y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 1 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 6 \end{cases} \rightsquigarrow y_3 = 6 - 3 = 3$$

$$\begin{cases} 3x_3 = 3 \\ 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

L'unique solution est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.4. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Est-ce que A admet une décomposition LU ? Si non, trouver une matrice inversible P telle que PA admette une décomposition LU, et calculer la.

. A n'admet pas une décomposition LU à cause du premier mineur principal.

. Pour le reste, on procède comme dans l'exercice précédent. Il vient

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U = I_3 \, U$$

C'est L !!!

Exercice 1.5. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{\text{pas inversible}} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$