Feuille de travaux dirigés 6

1. Matrices à coefficients positifs

Exercice 1.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A \geq 0$ si la matrice A a tous ses coefficients positifs, et $A > 0$ s'ils sont strictement positifs. On fait de même pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que A est positive si et seulement si pout tout vecteur $v \geq 0$, on a $Av \geq 0$.
(2) Montrer que A est strictement positive si et seulement si pout tout vecteur $v \geq 0$ non nul, on a $Av > 0$.
(3) On suppose A strictement positive.
  (a) A peut-elle être nilpotente ?
  (b) Montrer que $\rho(A) > 0$.
  (c) Montrer que $\rho(\frac{1}{\rho(A)}A) = 1$.

Exercice 1.2. (1) Construire une matrice positive non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ de rayon spectral nul.
(2) Construire une matrice positive non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral n'est pas une valeur propre simple.
(3) Construire une matrice positive de $M_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre non dominante.

Exercice 1.3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice primitive, et supposons $A^m > 0$ pour $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'alors $A^k > 0$ pour tout entier $k \geq m$.

Exercice 1.4. Étudier les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice est-elle primitive ?

Exercice 1.5. Montrer que la matrice suivante est irréductible: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier la conclusion du théorème de Frobenius en calculant ses valeurs propres. La matrice est-elle primitive ?

Exercice 1.6. Les matrices suivantes sont-elles primitives ? Irréductibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.7. Pour chacune des matrices stochastiques suivantes, déterminer, s'il existe, l'état limite de la marche aléatoire associée :

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.8. Dans un livre donné, les consommes et les voyelles se succèdent avec la probabilité suivante:
-la probabilité que deux voyelles se suivent est de 1/8,
-la probabilité que deux consonnes se suivent est de 1/3.
Quel est le pourcentage de voyelles et de consonnes dans ce livre ?