Feuille de travaux dirigés 5

1. Normes matricielles

Exercice 1.1. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note $||A||_1$ le nombre $\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|$. Montrer que $||\cdot||_1$ est une norme matricielle.

Exercice 1.2. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note $||A||_\infty$ le nombre $\max_{i,j=1}^n |a_{i,j}|$.

(1) Calculer $||A||_\infty$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et A^2.
(2) En déduire que $||\cdot||_\infty$ n'est pas une norme matricielle.
(3) On note $|||\cdot|||_\infty$ la norme subordonnée à la norme $||\cdot||_\infty$. Montrer que

$$|||A|||_\infty = max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 1.3. Calculer les normes $||\cdot||_1$, $|||\cdot|||_1$, $||\cdot||_\infty$ et $|||\cdot|||_\infty$ des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4. Soit N une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

(1) Les normes N et $||\cdot||_1$ sont-elle équivalentes sur $M_n(\mathbb{R})$?
(2) Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour toutes matrices A, B de $M_n(\mathbb{R})$, on ait
$$N(AB) \leq kN(A)N(B).$$
(3) Montrer que $N' = kN$ est une norme matricielle.

Exercice 1.5. (1) Toute norme sur $M_n(\mathbb{R})$ est-elle une norme subordonnée ?
(2) Existe-t'il une norme N sur $M_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$, vérifiant $N(AB) = N(A)N(B)$ pour tout couple $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$?

2. Rayon spectral

Exercice 2.1. Calculer la norme subordonnée à la norme $||\cdot||_2$ et le rayon spectral de la matrice A de l'exercice 1.3

Exercice 2.2. Calculer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3. Pour les matrices A suivantes, la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge-elle ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.4. Le but de l'exercice est de démontrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.

(1) Montrer l'implication directe.
(2) Réciproquement, montrer que $I - A$ est inversible dès que $\rho(A) < 1$.
(3) Démontrer l'égalité $(I - A)(I + A + \cdots + A^k) = I - A^{k+1}$.
(4) En déduire le résultat.

3. Erreur et conditionnement

Exercice 3.1. Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible et B une approximation de A^{-1}. On pose $X = I - AB$ et on suppose que $\|X\| < 1$. Montrer que

$$\|A^{-1} - B\| \leq \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}.$$

Exercice 3.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\mathrm{cond}_2(A)$, $\mathrm{cond}_1(A)$ et $\mathrm{cond}_\infty(A)$;
(2) Résoudre:
   - $Ax = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
   - $Ay = b + \delta b$ pour $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Az = b + \Delta b$ pour $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
(3) Pour chacune des trois normes considérées, comparer la majoration théorique de
$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \text{ et } \frac{\|z - x\|}{\|x\|}$$
avec les valeurs exactes. Quelle conclusion?

Exercice 3.3. (1) Soient a et b des réels et M la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Comparer $|||M|||_2$ et $\rho(M)$.
(2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale.
   (a) Montrer que $|||A|||_2 = \rho(A)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{cond}_2(A)$ est le quotient du module de la plus grande valeur propre de A par le module de la plus petite valeur propre de A.

Exercice 3.4. On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}$.

(1) Donner les valeurs propres et vecteurs propres de A.
(2) Exprimer les solutions de $Ax = b$ en fonction des vecteurs propres.
(3) Résoudre le système $Ax = b$ avec $b = (1, 1)$.
(4) On fait une erreur δb sur b de sorte que $||\delta b||/||b||$ soit de l'ordre de 0,01. L'erreur δx sur x satisfait donc $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Calculer l'erreur relative $||\delta x||/||x||$ faite sur x. Est-elle grande ?