Feuille de travaux dirigés 4

1. Matrices symétriques

Exercice 1.1. Diagonaliser en base orthonormée les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2. Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

Exercice 1.3. Soit A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

(1) Montrer que les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sont strictement positifs.
(2) Montrer que $\det A$ est strictement positif.
(3) Montrer que les mineurs principaux de A (i.e. les déterminants des matrices obtenues en supprimant les i dernières lignes et colonnes de A) sont strictement positifs.

Exercice 1.4. (1) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
  (a) Montrer que $S = {}^tA \cdot A$ est une matrice symétrique dont tous les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives.
  (b) Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$.

(2) Soit $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres positives.
  (a) Existe-t-il une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tA \cdot A$?
  (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible.
  (c) Application à $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Matrices orthogonales, normales

Exercice 2.1. Soit O dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que O est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Quelles sont ses valeurs propres ?
Faire de même avec une matrice orthogonale O dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.2. Déterminer les matrices O de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(O - I_n)^2 = 0$.

Exercice 2.3. Montrer qu'une matrice A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure et normale est diagonale.

Exercice 2.4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale dont le carré vaut $-I_n$.

(1) Calculer $({}^tAA)^2$.
(2) Montrer que A est orthogonale.

Exercice 2.5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit X le vecteur de taille n dont toutes les coordonnés sont égales à 1. Calculer ${}^tXAX$.
(2) On suppose A orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n.

Exercice 2.6. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considre l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) Sans calcul, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
(2) Montrer que f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
(3) Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
(4) Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.
(5) Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^\perp$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
(6) Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

3. Décomposition polaire

Exercice 3.1. Que signifie la décomposition polaire en dimension 1 ?

Exercice 3.2. Calculer le carré des matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Laquelle de ces matrices est la racine carrée de la matrice identité ?

Exercice 3.3. Les matrices suivantes sont-elles positives ? Définies positives ? Lorsqu'elles le sont, trouver leur racine carrée.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.4. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Rappeler pourquoi la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable en base orthonormée.
(2) Calculer la décomposition polaire de A.

Exercice 3.5. Donner la décomposition polaire des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$