Feuille de travaux dirigés 3

1. Normes vectorielles

Exercice 1.1. Démontrer les inégalités suivantes, valable pour tout x de $\mathbb{K}^n$:

(1) $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$,
(2) $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$,
(3) $||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$.

Exercice 1.2. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto tr\ {}^tAB$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des matrices $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.3. Soit M la matrice donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'application $B(x, y) =< Mx, My >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
Plus généralement, pour quelles matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ l'application $B(x, y) =< Ax, Ay >$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1.4. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. On pourra d'abord montrer que toute matrice triangulaire supérieure est limite d'une suite de matrices ayant ses valeurs propres deux à deux distinctes.

2. Exponentielle de matrices

Exercice 2.1. Soient A et B les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^{A+B} et e^Ae^B. Que peut-on dire de A et B ?

Exercice 2.2. Calculer e^{At} et e^{Bt} pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Quel est le polynôme caractéristique de A ? Quel est son polynôme minimal ?
(2) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle triangularisable sur $\mathbb{R}$?
(3) Calculer e^A.

Exercice 2.4. Calculer e^A pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.5. Si $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ commutent, montrer que A et e^B commutent.

Exercice 2.6. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer e^{tA}, puis résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = 3y - z \\ z' = 2x + y + 3z \end{cases}$$

de condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 1)$.

Exercice 2.7. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
(2) On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.
  (a) Montrer que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.
  (b) En déduire que la base (e_1, e_2, e_3) est une base de vecteurs propres de B.
  (c) Déterminer toutes les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $\exp B = A$.
(3) Soit la matrice C,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.

Exercice 2.8. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$. Trouver D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et

$$A = D + N.$$

(3) Soit le système différentiel E suivant:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Déterminer les solutions de E.