Feuille de travaux dirigés 2

1. Diagonalisation

Exercice 1.1. Diagonaliser dans $M_n(\mathbb{R})$, quand c'est possible, les matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et dans $M_n(\mathbb{C})$ les matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquer sans calcul pourquoi A n'est pas diagonalisable.

Exercice 1.3. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

Exercice 1.4. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
(2) Calculer $(A - 2I)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
(3) En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (*on pourra utiliser la formule du binôme*).

Exercice 1.5. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

(1) Diagonaliser A. Notons D la forme diagonale.
(2) On cherche à déterminer une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.
  (a) Déterminer C diagonale telle que $C^3 = D$.
  (b) En déduire $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.
  (c) Donner une autre matrice $C' \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $C'^3 = D$.
  (d) En déduire une autre matrice $B' \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $B'^3 = A$.

2. Polynômes d'endomorphisme

Exercice 2.1. Montrer que $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Est-ce le polynôme caractéristique ? Le polynôme minimal ? La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2.2. Soient A, B et C les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de polynômes caractéristiques $\chi_A(X) = (X+1)(X+2)(X-3)$, $\chi_B(X) = (X-1)(X+2)^2$ et $\chi_C(X) = (X-1)^3$. Pour chacune des matrices, trouver son polynôme minimal et dire si elle est diagonalisable.

Exercice 2.3. Trouver le polynôme minimal des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.4. Considérons les matrices suivantes dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Démontrer que la matrice D est diagonalisable. Déterminer P telle que $P^{-1}DP$ est diagonale (on ne demande pas de calculer P^{-1}).
(2) Calculer les polynômes caractéristiques et minimaux de A, B et C.
(3) Parmi A, B et C, lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ? Laquelle de ces matrices est semblable à D ?

Exercice 2.5. (1) Trouver l'indice de nilpotence de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Montrer que $f \in \mathcal{L}(V)$ est nilpotent si et seulement si son polynôme caractéristique verifie $P_f = (-1)^n X^n$.

3. Triangularisation

Exercice 3.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
(2) Déterminer les vecteurs propres de f associés à 1 et 2.
(3) Soit u un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs v et w tels que

$$f(v) = 2v + u \text{ et } f(w) = 2w + v.$$

(4) Soit $\vec{e}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 1. Démontrer que (e, u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de f dans cette base.
(5) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.2. Trigonaliser les matrices suivantes dans $M_n(\mathbb{C})$, puis les mettre sous forme de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3. Donner la décomposition de Dunford-Jordan de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.4.

(1) Déterminer la forme de Jordan J de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Déterminer une matrice de passage P pour passer de A à J. Calculer P^{-1}.

(4) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(5) Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par P_A, puis substituer A afin de retrouver le résultat précédent.

Exercice 3.5. Dans chacun des cas suivants, déterminer le terme général des suites définies par $(u_0, u_1) = (-1, 1)$ et la relation de récurrence pour $n \geq 0$:

$$(1)\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \ (2)\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, \ (3)\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$$

Exercice 3.6. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Trigonaliser A sous la forme de Jordan.

(2) Calculer A^k.

(3) Résoudre le système différentiel $x' = Ax$ de conditions initiales $x(0) = (1, 1, 1, 1)$.