Feuille de travaux dirigés 1

1. Dualité

Exercice 1.1. Calculer la base duale de la base de $\mathbb{R}^2$ donnée par les vecteurs $(1,2)$ et $(3,4)$.
Calculer aussi la base duale de la base de $\mathbb{R}^4$ donnée par les vecteurs $(1,1,1,1), (0,1,1,1)$, $(0,0,1,1)$ et $(0,0,0,1)$.

Exercice 1.2. Les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$ forment-elles une base du dual de $\mathbb{R}^3$? Une famille libre ? Dans ce second cas, la compléter en une base.

(1) $l_1(x) = 2x_1 - x_2 + x_3,\ l_2(x) = 3x_1 - x_2 + x_3,\ l_3(x) = x_1 + x_2 + x_3$
(2) $l_1(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3,\ l_2(x) = 3x_1 - 5x_2 + x_3,\ l_3(x) = 4x_1 - 7x_2 + x_3$
(3) $l_1(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3,\ l_2(x) = 3x_1 - 5x_2 + x_3$

Exercice 1.3. Montrer que les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$ forment une base du dual de $\mathbb{R}^3$, et trouver la base de $\mathbb{R}^3$ dont elle est la duale :

$$l_1(x) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ l_2(x) = x_2 + x_3,\ l_3(x) = 2x_1 + 2x_2 - x_3.$$

Exercice 1.4. Soient U_1 et U_2 des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V de dimension finie. Montrer que

(1) $U_1 \subset U_2 \implies U_2^o \subset U_1^o$,
(2) $(U_1 + U_2)^o = U_1^o \cap U_2^o$,
(3) $(U_1 \cap U_2)^o = U_1^o + U_2^o$ (on pourra montrer une inclusion puis l'égalité des dimensions).

Exercice 1.5. (Polynômes de Lagrange) Considérons l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n, et soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit des formes linéaires l_i par $l_i(P) = P(a_i)$.

(1) Montrer que la famille $(l_0, \dots, l_n)$ forme une base de V^*.
(2) Déterminer la base de V dont elle est la duale.

Exercice 1.6. Soit $f : U \to V$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que $(Imf)^o = Ker\ {}^tf$. En déduire que le rang de f est égal à celui de ${}^tf$.

Exercice 1.7. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application ϕ de V dans son bidual $(V^*)^*$ qui à $v \in V$ associe l'élément ϕ_v défini par $\phi_v(l) = l(v)$ pour tout l dans V^* est un isomorphisme.

2. Norme euclidienne

Soit V un espace vectoriel muni d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$. On note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique et $|| \cdot ||$ la norme euclidienne associée.

Exercice 2.1. Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille orthogonale dans V. Montrer que

$$||\sum_{i=1}^p v_i||^2 = \sum_{i=1}^p ||v_i||^2$$

Exercice 2.2. Soient u et v des vecteurs de V. Montrer l'égalité suivante:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2).$$

Exercice 2.3. Soient f et g des fonctions continues sur $[0,1]$. Montrer que

$$(\int_0^1 fg)^2 \leq (\int_0^1 f^2)(\int_0^1 g^2)$$

3. Orthogonalité

Exercice 3.1. On considère l'espace affine $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Calculer l'orthogonal

(1) du vecteur $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$,
(2) de l'hyperplan d'équation $x+2y-z+t=0$ dans $\mathbb{R}^4$,
(3) du sous-espace engendré par $(1,1,0)$ et $(-1,2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.2. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine du plan euclidien. Déterminer le sous-espace vectoriel $D^\perp$, orthogonal de l'ensemble D.

Exercice 3.3. Soit V un espace vectoriel munie d'une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$. On note $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire canonique et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée. Soit U un sous-espace vectoriel de V et p la projection orthogonale sur U. Montrer que si $\{f_1,\ldots,f_p\}$ est une base orthonormée de U, on a

$$p(v) = < v, f_1 > f_1 + \ldots + < v, f_p > f_p$$

pour tout vecteur v de V.

Exercice 3.4. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux familles libres suivantes.

(1) $(1,1)$, $(2,3)$.
(2) $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$.
(3) $(1,0,1,0)$, $(1,1,2,0)$, $(-1,2,-1,1)$, $(-1,-1,1,15)$.
(4) $(1,2,1)$, $(-1,0,-1)$. Compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.5. Soient $v_1=(1,0,1), v_2=(1,1,1), v_3=(-1,1,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(1) Vérifier que (v_1,v_2,v_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer sa base duale.
(2) On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
Orthonormaliser la famille (v_1,v_2,v_3) par le procédé de Gram-Schmidt.
(3) Donner la décomposition QR de la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées par les vecteurs v_1, v_2 et v_3.

4. Adjoint

Exercice 4.1. (1) Montrer que les matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ forment un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
(2) Faire de même avec les matrices anti-symétriques.
(3) Que dire de la somme de ces deux sous-espaces vectoriels ?

Exercice 4.2. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice orthogonale de $M_2(\mathbb{R})$. Écrire les équations en a,b,c,d décrivant l'orthogonalité de A. En déduire toutes les matrices orthogonales de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.3. Déterminer si les matrices suivantes sont orthogonales.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 4.4. Donner la décomposition QR des matrices

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$