RÉDUCTION ET ORTHOGONALITÉ

Rappel : un Rev E de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien

I COMMENT SE RAMENER AU PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE

[GRIFONE]

Définition (rappel)

Soit E un espace euclidien. Une base $\{e_i\}$ est dite **orthogonale** *si :*

$$< e_i, e_j >= 0 \quad \forall i, j \text{ tels que } i \neq j$$

Elle est dite **orthonormée** *si de plus chaque vecteur est de norme 1, c'est-à-dire si :*

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le "symbole de Kronecker" défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Il est clair que si $\{\varepsilon_i\}$ est une base orthogonale, les vecteurs $e_i := \dfrac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$ définissent une base orthonormée.

Théorème

$\boxed{\textit{Dans un espace euclidien il existe toujours des bases orthonormées.}}$

Théorème
Dans un espace euclidien, il existe toujours des bases orthonormées.

Démonstration

Il suffit, de montrer qu'il existe des bases orthogonales. Montrons cela par récurrence sur la dimension n de E.
Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer.
Supposons le théorème vrai à l'ordre $n-1$ et soit $v \in E, v \neq 0$. Si $F := [v]^{\perp}$ on a $\dim F = n-1$. Donc sur F, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des bases orthogonales.

Puisque $E = [v] \bigoplus F$ si $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}\}$ est une base orthogonale de F alors $\{v, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}\}$ est une base orthogonale de E. □

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée, et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E. On a :

$$< x, y > = < \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j > = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j < e_i, e_j >$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

On en déduit :

Corollaire

Le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_i\}$ *dans un espace euclidien, permet* **d'identifier E à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique,** *par l'isomorphisme :*

$$\varphi_{\mathcal{B}} \; : \; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longrightarrow & (x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

II DIAGONALISATION DES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS D'UN ESPACE EUCLIDIEN.

Une application importante du produit scalaire est le résultat suivant : toute matrice symétrique *réelle* est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Définition (rappel)

Un endomorphisme f d'un espace euclidien est dit **symétrique**, *ou* **"autoadjoint"** *si*

$$< f(x), y > = < x, f(y) > \qquad \forall x, y \in E$$

Remarque. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée et $A = M(f)_{e_i}$; la condition de la définition s'exprime sous forme matricielle par

$$^t(AX)Y = {}^tX \cdot AY \qquad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

, c'est-à-dire :

$$^tX^tAY = {}^tXAY \qquad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

ce qui est équivalent à $^tA = A$. Ainsi :

f est "symétrique" si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthonormée est symétrique.

Théorème

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. On a :

a)Les valeurs propres de f sont toutes réelles.
b)f est diagonalisable.
c)Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux

Ou encore, en termes de matrices :

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les espaces propres sont deux à deux orthogonaux

Démonstration Les valeurs propres sont réelles.

4

a) Soit A la matrice (symétrique réelle) qui représente f dans une base orthonormée et λ une valeur propre réelle ou complexe de A (λ existe car $P_A(X)$ considéré comme polynôme de $\mathbb{C}(X)$ admet, d'après le théorème de D'Alembert, au moins une racine) . Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$.Pour simplifier, raisonnons en termes de matrices. X étant la matrice d'un vecteur propre v correspondant à λ, on a :

$$AX = \lambda X, \quad \text{d'où} \quad \overline{AX} = \overline{\lambda X} \quad \text{c'est-à-dire } \overline{A}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$$

Mais A est réelle, donc : $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

Or :

$${}^t(AX)\,.\,\overline{X} = {}^tXA\overline{X} = \text{ car } A \text{ est symétrique, donc } {}^t(\lambda X)\overline{X} = {}^tX\overline{\lambda}\,\overline{X}$$

c'est-à-dire :

$$\lambda\|v\|^2 = \overline{\lambda}\|v\|^2 \quad \text{et comme } v \neq 0 : \lambda = \overline{\lambda}$$

Les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

c) Soient v_1 et v_2 vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrons que $v_1 \perp v_2$. On a :

$$< f(v_1), v_2 >= \lambda_1 < v_1, v_2 >$$

or f est autoadjoint, donc :

$$< f(v_1), v_2 >=< v_1, f(v_2) >= \lambda_2 < v_1, v_2 >;$$

$$\text{donc } (\lambda_1 - \lambda_2) < v_1, v_2 >= 0$$

$$\text{et comme } \lambda_1 \neq \lambda_2, < v_1, v_2 > = 0$$

f est diagonalisable.

b) Montrons, par récurrence sur la dimension n de E, qu'il existe une base de vecteurs propres.
Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$.
Soit λ une valeur propre de f, x un vecteur propre correspondant à λ et $H = [x]^{\perp}$. On a : $\dim H = n-1$.

D'autre part H est stable par f, c'est-à-dire $f(H) \subset H$.
En effet, soit $y \in H$ (c'est-à-dire $y \perp x$); il s'agit de montrer que $f(y) \in H$, c'est-à-dire $f(y) \perp x$. On a :

$$< f(y), x > = < y, f(x) > = \lambda < y, x > = 0, \text{ puisque } y \perp x$$

donc $f(y) \perp x$.

Ainsi H est stable par f, ce qui veut dire que la restriction $\widetilde{f}$ de f à H est un endomorphisme de H.
Comme $\dim H = n-1$, d'après l'hypothèse de récurrence il existe une base $\{e_2, \cdots, e_n\}$ formée de vecteurs propres de $\widetilde{f}$. Il est clair que $\{x, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f. □

REMARQUE. — Une matrice symétrique **complexe** (non réelle) n'est pas nécessairement diagonalisable

Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$

On a $P_A(X) = X^2 - 2i\,X - 1$

on a deux racines confondues, c'est-à-dire une valeur propre double $\lambda = i$ et donc $P_A(X) = \left(X - i\right)^2$

A serait alors diagonalisable si et seulement si $m_A(X) = X - i$ c'est-à-dire $A = iI$ ce qui est évidemment exclu.

[GOURDON]

COROLLAIRE. Soit E un espace euclidien et f et g deux endomorphismes autoadjoints de $\mathcal{L}(E)$ tels que $fg = gf$. Alors f et g sont diagonalisables dans une base commune de vecteurs propres orthonormés.

Solution. Les endomorphismes f et g étant autoadjoints, on sait déjà qu'ils se diagonalisent chacun dans une base orthonormée. Il nous reste à montrer que l'on peut prendre la *même* base pour les deux.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres (distinctes) de f, $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ les sous espaces propres correspondants. Les E_{λ_i} sont deux à deux orthogonaux

. Comme f et g commutent, les E_{λ_i} sont stables par g. La restriction de g à E_{λ_i} étant autoadjointe, il existe une base *orthonormée* B_i de E_{λ_i} diagonalisant $g_{|E_{\lambda_i}}$. Les E_{λ_i} étant deux à deux orthogonaux, on en déduit que $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ est une base orthonormée. Cette base diagonalise g par construction ainsi que f puisque chaque vecteur e de B_i vérifie $f(e) = \lambda_i e$. $\square$

II DÉCOMPOSITION POLAIRE

DÉFINITION : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique (définie) positive si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et toutes les valeurs propres de A sont positives (strictement).

LEMME

$A \in S_n(\mathbb{R})$ est positive (définie) $\Longleftrightarrow$ $\forall X \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) ${}^tXAX \geqslant 0$ ($>$)

DÉMONSTRATION

- Il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tOAO = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Alors

$$A \text{ positive} \Longleftrightarrow \forall i \quad \lambda_i \geqslant 0$$

Or ${}^tXDX = \sum \lambda_i x_i^2$, donc s'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ avec $\lambda_{i_0} < 0$, on aurait ${}^tXDX < 0$ avec $X = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} i_0$. Alors

$$A \text{ positive} \Longleftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tXDX \geqslant 0$$

car O est inversible

$$\Longleftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^t({}^tOX) D ({}^tOX) \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tX \underbrace{OD{}^tO}_{=A} X \geqslant 0$$

- Si de plus A est définie positive, ${}^tXDX$ ne s'annule qu'en $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

RAPPEL : si $f, g \in \mathcal{L}(V)$ commutent, tout espace propre de l'un est stable par l'autre.

THÉOREME (Racine carrée d'une matrice symétrique positive). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Il existe une unique matrice $R \in S_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $A = R^2$.

Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique. $P_A(X) = -X(X-1)(X-16)$

donc A est positive. On la diagonalise en base orthonormée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = {}^tP\,A\,P, \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

- Ainsi la racine de A cherchée est

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tP$$

THÉORÈME (RACINE CARRÉE D'UNE MATRICE HERMITIENNE POSITIVE). Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in S_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $H = R^2$.

Solution. *Existence.* La matrice H étant symétrique, il existe une matrice $C \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$ {}^tCHC = C^{-1}HC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D, $$

D étant diagonale réelle. Comme H est positive, tous les λ_i sont positifs donc pour tout i, il existe $\mu_i \geq 0$ tel que $\lambda_i = \mu_i^2$. En posant

$$ D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}, $$

on a $D'^2 = D$ de sorte que $R = CD'C^{-1} = CD'{}^tC$ est symétrique positive et vérifie

$$ R^2 = CD'^2C^{-1} = CDC^{-1} = H. $$

Unicité. Soit $R \in S_n(\mathbb{R})$ positive telle que $R^2 = H$. Soient h et r les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont H et R sont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $H \in S_n(\mathbb{R})$, h est autoadjoint. Ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont positives car H est positive. Notons $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous espaces propres correspondants. Comme r commute avec $r^2 = h$, chaque E_{λ_i} est stable par r. On note $r_i = r_{|E_{\lambda_i}}$. On a $r_i^2 = \lambda_i \operatorname{Id}_{E_{\lambda_i}}$, et r_i est autoadjoint positif; toute valeur propre μ de r_i vérifie $\mu^2 = \lambda_i$, donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ est la seule valeur propre possible de r_i (car les valeurs propres de r_i, qui sont des valeurs propres de r donc de R, sont positives). Comme r_i est de plus diagonalisable (car autoadjoint), on en déduit $r_i = \sqrt{\lambda_i} \operatorname{Id}_{E_{\lambda_i}}$.

Résumons. Si $r^2 = h$, alors forcément pour tout i, $r_{|E_{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i} \operatorname{Id}_{|E_{\lambda_i}}$, ce qui définit r de manière unique, d'où l'unicité de R.

$\square$

LEMME

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tMM$ est symétrique positive. Si de plus $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM$ est définie positive

Preuve:

- ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$ donc ${}^tMM$ est symétrique
- Soit v un vecteur propre associé à une valeur propre λ (${}^tMM$ est diagonalisable). Alors

$$\begin{aligned} \langle {}^tMMv, v\rangle &= \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \|v\|^2 \\ \| \\ \langle Mv, Mv\rangle &= \|Mv\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\lambda \geq 0$

- Si de plus M est inversible, alors $Mv \neq 0$ et $\lambda > 0$

$\square$

THÉORÈME (DÉCOMPOSITION POLAIRE)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ positive telles que $A = OS$.

Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{R})$, la décomposition est unique.

Remarque :

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, S est de plus définie positive

LEMME 1

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } M_n(\mathbb{R})}$$

LEMME 2

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compacte}}$$

Preuve :

On va démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné dans $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Pour cela, on choisit de travailler avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

borné : soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Comme ${}^tOO = I$ on a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$

En particulier $|a_{ij}| \leq 1$ pour tout i et j, donc $\|O\|_\infty \leq 1$.

fermé : $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est une application continue
$$M \longmapsto {}^tMM$$
(car polynomiale en les coefficients de M). Alors $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(I)$ est un fermé

$\square$

Remarque :

Pour démontrer le lemme 1, on avait utilisé le fait que $\det(A - \frac{1}{k}I) \neq 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand.

THÉORÈME

$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$, $\exists S \in S_n^+(\mathbb{R})$ $\quad A = OS$

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, le couple (O, S) est unique

__Démonstration__

1] Le cas $A \in GL_n(\mathbb{R})$, par analyse-synthèse

2] Le cas général, par densité.

1] Analyse : Supposons $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ positive, et $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tAA = {}^t(OS)OS = {}^tS \underbrace{{}^tOO}_{I} S = S^2$.

Ainsi S est l'unique racine positive de ${}^tAA$ (qui est bien une matrice symétrique positive par un lemme précédent).

On obtient alors $O = AS^{-1}$ (S est bien inversible car ${}^tAA$ est définie positive car A est inversible).

Synthèse : Soit S la matrice symétrique définie positive vérifiant $S^2 = {}^tAA$. Posons $O = AS^{-1}$. Il nous reste à vérifier que $O \in O_n(\mathbb{R})$ (vu qu'on a bien $A = OS$).

On

$${}^tOO = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^t(S^{-1})\underbrace{{}^tAA}_{S^2}S^{-1} = {}^tS^{-1}S^2S^{-1} = {}^tS^{-1}S$$

Or S est symétrique : $S = {}^tS$. On a donc

$${}^tOO = {}^tS^{-1}\,{}^tS = {}^t(SS^{-1}) = {}^tI = I.$$

Ainsi $O \in O_n(\mathbb{R})$ et on a démontré le point 1].

2] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Par le lemme 1, il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles telles que $A = \lim_{k\to\infty} A_k$.

D'après le cas 1], pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $O_k \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_k \in S_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telles que $A_k = O_k S_k$.

$\to$ Est-ce que les suites $(O_k)_k$ et $(S_k)_k$ convergent ?

En tout cas, par compacité de $O_n(\mathbb{R})$ (lemme 2), il existe une sous-suite de $(O_k)_k$ qui converge dans $O_n(\mathbb{R})$. Notons $(O_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite et $O \in O_n(\mathbb{R})$ sa limite.

Posons $S = {}^tO A$. Alors

- $A_{k_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} A$
- $O_{k_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} O$ donc ${}^tO_{k_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} {}^tO$

D'où $S_{k_\ell} = {}^tO_{k_\ell} A_{k_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} {}^tO A = S$. On en déduit que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\underbrace{{}^tX S_{k_\ell} X}_{\geqslant 0} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} {}^tX S X$$

car S_{k_ℓ} symétrique positive

Donc ${}^tX S X \geqslant 0$. Ainsi S, qui est symétrique car limite de matrices symétriques, est aussi positive.

Finalement $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ positive.

$\square$

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$$

Ici $\quad {}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $P = \ldots$

Ainsi $\quad S = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

et $\quad O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$

Finalement la décomposition polaire de A est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[GOURDON] (7)

3 Réduction des isométries

Nous allons voir que les isométries , bien que n'étant pas des endomorphismes autoadjoints, se diagonalisent sympathiquement dans une base orthonormale.

Proposition . *Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie. Si F est un s.e.v de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in F^\perp$ et pour tout $y \in F$ $\langle u(x), y\rangle = 0$. Comme $u_{|F}$ est une isométrie, $u_{|F}$ est bijective , donc il existe $y' \in F$ tel que $y = u(y')$. On a maintenant

$$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y')\rangle = \langle x, y'\rangle = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in F^\perp$ et pour tout $y \in F$, $F^\perp$ est bien stable par u. □

Réduction des isométries.

→ **Théorème** . *Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie. Alors il existe une base orthonormale B de E dans laquelle la matrice de u a la forme*

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

où pour tout i, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ et pour tout j,

$$R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \theta_j \in \mathbb{R},\ \theta_j \not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Remarque . On retrouve ainsi la forme des isométries du plan et de l'espace : (8)

- Les isométries directes du plan sont des *rotations* d'angle θ (elles ont pour matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$), les isométries indirectes des symétries par rapport à des droites (matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

- Les isométries directes de l'espace sont des *rotations* d'angle θ autour d'un axe (matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le dernier vecteur de la base étant l'axe de rotation). Lorsque $\theta = \pi$, on parle de *retournement*.
  Les isométries indirectes de l'espace ont pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Lorsque $\theta = 0$, on a affaire à une symétrie par rapport à un plan et on parle alors de *reflexion*.

Remarque 2. La version matricielle de ce théorème est la suivante. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP = {}^tP\,MP$ ait la forme (*).

Démonstration. On procède par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n. Nous traitons deux cas. (9)

Premier cas. L'isométrie u admet au moins une valeur propre réelle ε. Soit x un vecteur propre associé. On a $\|u(x)\| = \|\varepsilon x\| = |\varepsilon|\,\|x\|$ et comme $\|u(x)\| = \|x\|$, $|\varepsilon| = 1$. De plus $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on en déduit alors $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Maintenant, comme $F = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par u, $F^\perp$ est stable par u d'après la proposition 1. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $u_{|F^\perp}$, on trouve une base orthonormale B_0 de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{|F^\perp}$ a la forme (*). En ajoutant x a la base B_0, on obtient une base orthonormale B de E dans laquelle la matrice de u a la forme (*).

Le second cas est plus délicat, on utilise le fait que $u + {}^t u$ (ou $u + u^*$) est symétrique, donc diagonalisable.

Second cas. L'isométrie u n'a aucune valeur propre réelle. On considère l'endomorphisme $v = u + u^*$. Comme v est symétrique, v admet une valeur propre réelle λ associée à un vecteur propre x. On a $(u+u^*)(x) = \lambda x$ donc $u(u+u^*)(x) = u^2(x) + x = \lambda u(x)$, d'où $\boxed{u^2(x) = \lambda u(x) - x}$ $(**)$. Par ailleurs, la famille $(x, u(x))$ est libre puisque u n'admet pas de valeur propre réelle. En posant $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$, on voit que $\dim F = 2$ et que F est stable par u (d'après $(**)$).

Soit $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de $u_{|F}$ dans une base orthonormale B_1 de F. Comme $u_{|F}$ est une isométrie, ${}^tN\,N = I_2 = N\,{}^tN$. Parmi les équations issues de ces égalités, on trouve

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = 1 \quad \text{et} \quad ab + cd = 0. \qquad (***)$$

La première assertion de $(***)$ entraîne $c = \pm b$. On ne peut pas avoir $c = b$ car N serait symétrique ce qui est impossible car u n'admet pas de valeur propre réelle. Donc $c = -b \neq 0$, et d'après la deuxième assertion de $(***)$, $d = a$. Comme de plus $a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Finalement, la matrice N est de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Maintenant, d'après la proposition le s.e.v $F^\perp$ est stable par u, et $u_{|F^\perp}$ est une isométrie donc il existe d'après l'hypothèse de récurrence une base orthonormale B_0 de $F^\perp$ de la forme(*) pour $u_{|F^\perp}$. La base $B = B_0 \cup B_1$ est orthonormale et dans cette base, la matrice de u a la forme voulue, d'où le théorème. $\square$

4. Endomorphismes normaux

Les endomorphismes normaux généralisent les endomorphismes autoadjoints.

Dans cette section E désigne un espace euclidien.

Définition . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *normal* si u et u^* commutent.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite normale si M et ${}^tM$ commutent.

Il est intéressant d'avoir une réduction de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est le but de ce qui suit. Nous commençons par un petit lemme.

Lemme . *Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute base B orthonormale de E, la matrice de u a la forme*

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Écrivons

$$M = [u]_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a $b \neq 0$ puisque u est sans valeur propre réelle. Comme u est normal, ${}^tM\ M = M\,{}^tM$ .Parmi les équations découlant de cette égalité, on trouve

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad ac + bd. = ab + cd. \qquad (*)$$

La première assertion de (*) entraîne $b = c$ ou $b = -c$.
Si $b = c$, alors M est symétrique, ce qui est impossible puisque u est sans valeur propre réelle.
Donc $b = -c$. Maintenant, la deuxième assertion de (*) s'écrit $2(a - d)b = 0$, et comme $b \neq 0$, on a $a = d$. Finalement, on a

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

$\square$

La démonstration du résultat suivant est dans le même esprit que la réduction des isométries.

THÉORÈME *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthogonale B de E telle que*

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

où pour tout i, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout j, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.