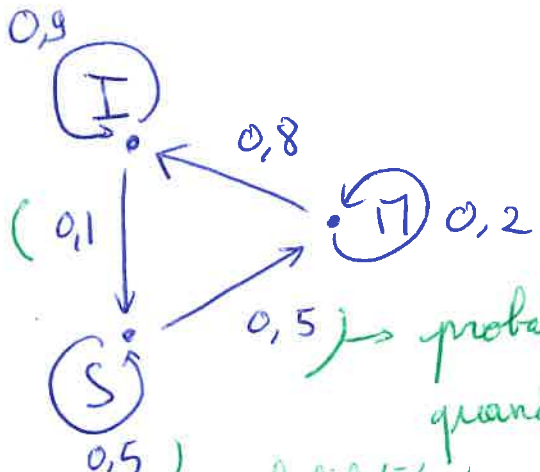
AUTOUR DES THÉORÈMES DE PERRON-FROBENIUS

EXEMPLE INTRODUCTIF : évolution d'une maladie

- Trois états possibles :
  - Immunisé
  - Sain (mais non immunisé)
  - Malade
- Le graphe modélisant les transitions entre ces états est : (de semaine en semaine)



probabilité de perdre son immunité

↳ probabilité de devenir malade quand on est sain

↳ probabilité de rester sain

- La matrice de transition est :

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} I & S & M \\ \left(\begin{array}{c} 0,9 \\ 0 \\ 0,8 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0,1 \\ 0,5 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} \\ /I \\ /S \\ /M \end{array}$$

$p(I|M)$ → $0,8$

Cette matrice permet de calculer l'évolution de l'état de la population.

Si $V = (x \quad y \quad z)$ représente la population à un moment donné (avec x% d'immunisés, y% de sain, z% de malad[es])
au bout d'une semaine l'état est

$$V' = VA$$

Remarque : par tradition probabiliste, la multiplication se fait à gauche par des vecteurs lignes. Il serait plus naturel de travailler avec ${}^tA$ ...

Ainsi $V' = (\underbrace{0,9x + 0,8z}_{} \quad 0,1x + 0,5y \quad 0,5y + 0,2z)$

90% d'immunisés le sont restés,
et 80% des malades le sont devenus

Notons V_n le vecteur ligne représentant l'état après n semaines
Alors $V_{n+1} = V_n A$
d'où (par récurrence) $V_n = V_0 A^n$.

Par exemple

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} I & S & M \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & I & S & M & \\ \hline & 0,81 & 0,14 & 0,05 & /I \\ A^2 = & 0,4 & 0,25 & 0,35 & /S \\ & 0,88 & 0,08 & 0,04 & /M \end{array}$$

probabilité de perdre son immunité au bout de deux semaines

probabilité d'être malade au bout de deux semaines, sachant qu'on était (censé être) immunisé

I 'intérêt : évolution à long terme.

Ici : • la suite $(A^n)_n$ semble avoir une limite :

$$L = \text{“}\lim_{n\to\infty} A^n\text{''} = \begin{pmatrix} 0,7547\ldots & 0,1509\ldots & 0,0943\ldots \\ 0,7547\ldots & 0,1509\ldots & 0,0943\ldots \\ 0,7547\ldots & 0,1509\ldots & 0,0943\ldots \end{pmatrix}$$

• cette limite a ses trois lignes égales

⇝ quelque soit l'état initial $V_0 = (I_0 \quad S_0 \quad R_0)$, au bout d'un temps assez long l'état V est

$$V_0 L = (0,7547\ldots \quad 0,1509\ldots \quad 0,0943\ldots)$$

QUESTIONS :

* pourquoi la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?
* qu'est ce qui explique la forme de la limite ?
* comment trouver a priori l'état limite ?

I MATRICES POSITIVES

Tout d'abord les matrices stochastiques

DÉFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit A stochastique si tous ses coefficients sont positifs et la somme des termes de chaque ligne est égale à 1.
Un vecteur est dit stochastique si tous ses coefficients sont positifs et leur somme vaut 1

LEMME

- La limite d'une suite de matrices stochastiques convergente est une matrice stochastique
- Deux vecteurs stochastiques proportionnels sont égaux

Démonstration

- L'ensemble des matrices stochastiques est

$$\Big\{ (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ \forall i,j \quad \underbrace{a_{ij} \geq 0}_{\text{inégalité large}} \quad \text{et } \forall i, \ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1}_{\text{égalité}} \Big\}$$

c'est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

- Si $V = (v_1 \dots v_n)$ et $W = (w_1 \dots w_n)$ sont proportionnels, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que $V = \lambda W$. Alors

$$1 = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} w_i = \lambda$$

$\square$

LEMME

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ des matrices stochastiques.
Alors AB est une matrice stochastique.

Démonstration

Le coefficient d'indice (i,j) de AB est

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

d'où la somme sur la i-ème ligne de AB est :

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \right)}_{=1 \text{ car } B \text{ est stochastique}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

$$= 1 \text{ car } A \text{ est stochastique.}$$

$\square$

COROLLAIRE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique. Si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite L, alors L est stochastique.

Démonstration

Par le lemme précédent tous les termes de la suite sont stochastiques (par récurrence), et on peut alors appliquer le lemme d'avant. Sinon directement, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \lim_{k \to \infty} (A^k)_{ij} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la somme} \\ \text{est finie}}}{=} \lim_{k \to \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (A^k)_{ij}}_{=1 \text{ car } A^k \text{ est stochastique}} = \lim_{k \to \infty} 1 = 1$$

$\square$

Plus généralement :

DÉFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- A est dite <u>positive</u> si : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 : a_{ij} \geq 0$, noté $A \geq 0$
- A est <u>strictement positive</u> si ———— > 0, noté $A > 0$
- A est <u>primitive</u> s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k > 0$
- A est <u>irréductible</u> si :

  $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \exists k \in \mathbb{N} : (A^k)_{ij} > 0$.

EXEMPLES

- une matrice stochastique est positive
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible mais pas primitive.

En effet $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad A^{2k} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{2k+1} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- la matrice stochastique de l'exemple introductif est primitive :

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^2 > 0$$

II ÉTUDE EN DIMENSION DEUX

1) MATRICES STOCHASTIQUES

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stochastique. Alors A est diagonalisable et $Sp A = \{1, \lambda\}$ avec $|\lambda| \leq 1$.
Si de plus $A > 0$, alors $|\lambda| < 1$

Démonstration $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in [0,1]^2$.

. Alors $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc $1 \in Sp A$.

. Alors A admet une seconde valeur propre réelle

$$\lambda = Tr A - 1 = a + b - 1$$

et $0 \leq a+b \leq 2$

d'où $\lambda \in [-1, 1]$.

. Si $A > 0$, alors $(a,b) \in (]0,1[)^2$ et $0 < a+b < 2$

d'où $\lambda \in]-1, 1[$.

. Si $\lambda \neq 1$, A est diagonalisable car ses valeurs propres sont distinctes

. Si $\lambda = 1$, alors $a+b = 2$ donc $a = b = 1$. Mais alors $A = I_2$.

Dans tous les cas, A est diagonalisable. $\square$

REMARQUES

- Une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres. On a donc aussi

$$Sp\ {}^tA = Sp\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} = \{1,\ a+b-1\}$$

- De plus $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour ${}^tA$ associé à la valeur propre $a+b-1$;

En effet $\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-1 \\ 1-a-b \end{pmatrix} = (a+b-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Enfin $\begin{pmatrix} 1-b \\ 1-a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour ${}^tA$ associé à la valeur propre 1

En effet $\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-b \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1-b)+(1-a)(1-b) \\ (1-a)(1-b)+b(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b \\ 1-a \end{pmatrix}$

Notons que $\begin{pmatrix} \frac{1-b}{2-a-b} \\ \frac{1-a}{2-a-b} \end{pmatrix}$ est un vecteur stochastique si $A \neq I$ (et donc $2-a-b \neq 0$), qui est un vecteur propre pour ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

THEOREME

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ stochastique strictement positive.

Alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix}$

Démonstration

- D'après la proposition, A est diagonalisable et $|\lambda| < 1$
- Considérons ${}^tA$, qui est aussi diagonalisable. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1-b & 1 \\ 1-a & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Alors } P^{-1} = \frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a-1 & 1-b \end{pmatrix}$$

Alors $$P^{-1}\,{}^tA\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

d'où $$({}^tA)^n = {}^t(A^n) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = L$$

- Par calcul on obtient

$$L = \frac{1}{a+b-2}\,P\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & b-1 \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ${}^tL$

$\square$

REMARQUE

La limite obtenue est de la forme $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ l'unique vecteur propre stochastique associé à la valeur propre 1 pour ${}^tA$.

2) MATRICES POSITIVES STRICTEMENT

Reprenons l'étude précédente avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $a, b, c, d > 0$.

$$\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$$

de discriminant

$$\Delta = (a+d)^2 + 4(bc - ad) = (a-d)^2 + 4bc > 0$$

Ainsi M admet deux racines réelles distinctes :

$$\mathrm{Sp}\, M = \Big\{ \underbrace{r_1 = \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2}}_{r_1 > 0}, \ \underbrace{r_2 = \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}}_{r_2 < r_1} \Big\}$$

et M est diagonalisable

LEMME

$\rho(M) = r_1$ et $E_{r_1}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \overset{>0}{b} \\ \underbrace{\rho(M) - a}_{>0} \end{pmatrix}$.

<u>Démonstration</u>

- Les valeurs de r_1 et r_2 donnent que : $0 \leq |r_2| < r_1$

d'où $\rho(M) = r_1$.

- Notons de plus que $\Delta > (a-d)^2$

d'où $\sqrt{\Delta} > a - d$ et $\sqrt{\Delta} > d - a$

et donc $r_1 > \max\{a, d\}$.

- Enfin on vérifie que $\begin{pmatrix} b \\ r_1 - a \end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de M

pour la valeur propre r_1 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ r_1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + br_1 - ba \\ \underbrace{bc - ad}_{-\det M = -r_1 r_2} + dr_1 \end{pmatrix} = r_1\begin{pmatrix} b \\ d - \underbrace{r_2}_{} \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} b \\ r_1 - a \end{pmatrix}$$

$r_1 + r_2 = d + a = \mathrm{tr}\, M$

On remarque que les coefficients de $\begin{pmatrix} b \\ r_1 - a \end{pmatrix}$ sont strictement positifs

$\square$

III THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS

Les théorèmes de Perron et Frobenius généralisent en dimension plus grande les phénomènes vus en II.

THÉORÈME (PERRON)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice primitive. Alors :

* $\rho(A)$ est une valeur propre
* $\rho(A)$ est une valeur propre simple : $\dim E_{\rho(A)}(A) = 1$
* pour toute autre valeur propre λ de A, on a $|\lambda| < \rho(A)$
* il existe $v \in \mathbb{R}^n$ avec $v > 0$ tel que $E_{\rho(A)}(A) = \mathrm{Vect}(v)$

on dit que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante.

REMARQUES

• $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive (mais pas strictement), et non primitive.

Ici $\rho(A_1) = 0$ n'est pas une valeur propre simple.

• $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas primitive (elle est irréductible).

Ici $\mathrm{Sp}\, A_2 = \{-1, 1\}$ et $\rho(A_2) = 1$. Ainsi $\rho(A_2)$ est une valeur propre simple, mais pas dominante.

Démonstration (partielle) du théorème de Perron

Pour simplifier on suppose $A > 0$ et $\rho(A) = 1$.

Soit $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathrm{Sp}A$ avec $|\lambda| = 1$.
$v \neq 0$

Par la suite on a noté $X \geq 0$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec tous les $x_i \geq 0$. De même $X \geq Y$ si pour tout i $x_i \geq y_i$.

- Montrons que $|v| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix} \leq A \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix} = A|v|$

En effet
$$\begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix} = |Av|$$ où par $|Av|$ on désigne le vecteur obtenu à partir de Av en prenant les modules des coordonnées.

Or $$|(Av)_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||v_j| = \left(A \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}\right)_i$$

- Si $|v| = A|v|$, on obtient $1 \in \mathrm{Sp}A$. comme attendu.

Supposons donc $|v| < A|v|$ et arrivons à une contradiction.

On a donc $A|v| - |v| > 0$, d'où
$$A^2|v| - A|v| = A(A|v| - |v|) > 0 \quad \text{car } A > 0.$$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ assez petit tel que
$$A^2|v| - A|v| > \varepsilon A|v|$$

d'où $$\left(\frac{1}{1+\varepsilon} A\right) A|v| > A|v|$$

On en déduit (par récurrence) $\boxed{\left(\frac{1}{1+\varepsilon} A\right)^k A|v| > A|v|}$ (*)

Or $\rho\left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right) = \frac{1}{1+\varepsilon}\rho(A) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$

donc (cours précédent) la suite $\left(\left(\frac{1}{1+\varepsilon}A\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

De $(*)$ on déduit alors $A|v| \leq 0$, ce qui est impossible car $\begin{cases} A>0 \\ v\neq 0 \end{cases}$.

Ainsi $\rho(A)=1$ est bien une valeur propre.

- Montrons qu'il existe un vecteur propre à coordonnées strictement positives.

Soit $v\in E_1(A)\setminus\{0\}$. Alors $A|v|=|v|$ d'après l'étude précédente. Or

$$(A|v|)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j| > 0 \quad \text{car} \begin{cases} A>0 \\ v\neq 0 \end{cases}$$

d'où $|v| = A|v| > 0$.

Ainsi $|v|$ convient.

On accepte que $*$ $\rho(A)=1$ est dominante

$*$ $\dim E_1(A) = 1$

$\square$

Le théorème de Frobenius traite le cas plus général des matrices positives irréductibles.

THÉORÈME (FROBENIUS)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ positive et irréductible. Alors :

* $\rho(A)$ est une valeur propre
* ——————————— simple
* il existe $v \in E_{\rho(A)}(A)$ avec $v > 0$

On accepte la démonstration.

REMARQUE

Par contre $\rho(A)$ n'est plus forcément une valeur propre dominante

exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $Sp\,A = \{-1, 1\}$

et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

IV RETOUR AUX MATRICES STOCHASTIQUES

Rappel : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si $A \geq 0$ et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique. Alors $\rho(A) = 1$

Démonstration

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in \mathrm{Sp}\, A$ (*)

  " c'est le maximum de la somme des |coefficients| des colonnes "

- $|||{}^tA|||_1 = 1$ et $|||\cdot|||_1$ est une norme matricielle. Donc d'après le cours sur le rayon spectral, on a $\rho({}^tA) \leq |||{}^tA|||_1 = 1$.

- Finalement $\rho(A) = \rho({}^tA)$ car $\chi_A = \chi_{{}^tA}$

donc

$$1 \underset{(*)}{\leq} \rho(A) = \rho({}^tA) \leq 1$$

□

Le résultat important est le suivant.

THÉORÈME

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique primitive. Alors la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique L de la forme

$$L = \begin{pmatrix} \ell \\ \vdots \\ \ell \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où ℓ est un vecteur stochastique ligne.

DEFINITION

On appelle $\ell \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'état limite associé à A.

EXEMPLE

Sur l'exemple introductif, l'état limite associé à

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$, qui est bien primitive car $A^2 > 0$,

est $\ell = \left(\frac{40}{53}, \frac{8}{53}, \frac{5}{53} \right)$

Avant de démontrer le théorème, on établit un résultat préliminaire.

fin cours 15/10

LEMME

Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq r < 1$, et soit $\ell \in \mathbb{N}$.

Alors la suite $\left(\binom{k}{\ell} r^{k-\ell} \right)_{k \geq \ell}$ converge vers 0.

Démonstration

Posons $u_k = \binom{k}{\ell} r^{k-\ell}$ pour $k \geq \ell$.

Alors $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = r \dfrac{\binom{k+1}{\ell}}{\binom{k}{\ell}} = r \dfrac{k+1}{k+1-\ell} \xrightarrow[k \to +\infty]{} r$

Or $0 \leq r < 1$, donc d'après la règle de d'Alembert la suite $(u_k)_k$ converge vers 0.

$\square$

Démonstration du théorème

($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique primitive.

Alors $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{pmatrix} \ell \\ \vdots \\ \ell \end{pmatrix}$ avec ℓ stochastique)

- On triangularise A sous forme de Jordan : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{J_1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix} \quad \text{avec } J_i = \lambda_i I + N_i$$

où $\underbrace{|\lambda_i| < 1}$ et N_i est nilpotente.

d'après le théorème de Perron

- On en déduit $A^k = PJ^kP^{-1}$ et $J^k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & J_1^k & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r^k \end{pmatrix}$

- Considérons le calcul des puissances pour un des blocs de Jordan $\lambda I + N$

$$(\lambda I + N)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} N^\ell (\lambda I)^{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} N^\ell$$

Or N est nilpotente d'ordre plus petit que n, donc pour $k \geq n$

$$(\lambda I + N)^k = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} N^\ell$$

La somme comporte au plus n termes !

Or la suite $\binom{k}{\ell}\lambda^{k-\ell}$ converge vers 0 d'après le lemme précédent (en effet $|\lambda| < 1$) et donc $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda I + N)^k = 0$.

- Finalement la suite $(J^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- On en déduit, par continuité de l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B &\longmapsto PBP^{-1} \end{aligned}$$

que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers L avec L qui vaut :

$$L = P \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & - & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{array} \right) P^{-1}$$

- La première colonne de P est un vecteur propre associé à 1 et $E_A(1) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $P = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \vdots & \cdots \\ \alpha & \end{array} \right)$.

Ainsi

$$L = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \alpha & \\ \vdots & O \\ \alpha & \end{array} \right) P^{-1} = \alpha \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \ell_1 \end{pmatrix}$$

où ℓ_1 est la première ligne de P^{-1}. Notons qu'a priori α et ℓ_1 peuvent être complexe (on a triangularisé $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Cependant on sait par un résultat précédent que la limite, quand elle existe, d'une suite de matrices stochastiques, est une matrice stochastique.

Donc $\ell = \alpha \ell_1$ est un vecteur stochastique et

$$\lim_{k \to \infty} A^k = \begin{pmatrix} \ell \\ \hline \vdots \\ \hline \ell \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$\square$

Dans la pratique, on est intéressé par connaître l'état limite ℓ sans avoir à procéder comme dans la démonstration. C'est possible grâce au résultat suivant :

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique primitive, et soit $\ell \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ son état limite. Alors ${}^t\ell$ est l'unique vecteur propre stochastique de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

Démonstration

- Notons que
  - ${}^tA$ est primitive car A l'est
  - $\chi_{{}^tA} = \chi_A$

Ainsi 1 est valeur propre simple de ${}^tA$. Notons $\omega \in E_1({}^tA)$ l'unique vecteur tel que $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$. On va montrer $\omega = {}^t\ell$.

On a donc ${}^tA\,\omega = \omega$. On en déduit par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $({}^tA)^k \omega = \omega$. Faisons le !

H_k : pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $({}^tA)^k \omega = \omega$

Initialisation : si $k = 1$, c'est vrai car $\omega \in E_1({}^tA)$

Hérédité : supposons H_k. Alors $({}^tA)^{k+1}\omega = {}^tA\left(({}^tA)^k \omega\right)$

$= {}^tA\,\omega$ d'après H_k

$= \omega$ d'après H_1

Ainsi $H_k \Rightarrow H_{k+1}$

On a donc démontré par récurrence que

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ H_k est vraie.

De plus $({}^tA)^k = {}^t(A^k)$, d'où $\lim_{k\to\infty} ({}^tA)^k = {}^t\begin{pmatrix} \ell \\ \vdots \\ \ell \end{pmatrix} = {}^tL$

On en déduit ${}^tL\omega = \omega$, et donc ω appartient à $\operatorname{Im} {}^tL = \left({}^t\ell \,|\, \cdots \,|\, {}^t\ell \right)$ qui est engendré par ${}^t\ell$, donc $\omega = \alpha\, {}^t\ell$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalement

$1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \ell_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \alpha$ et $\omega = {}^t\ell$

$\square$

RETOUR À L'EXEMPLE INTRODUCTIF

L'état limite associé à la matrice stochastique primitive

$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$ est <u>le</u> vecteur stochastique ℓ vérifiant

$-L_2 = L_1 + L_3$

${}^tA\,{}^t\ell = {}^t\ell$. Or

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -0,1\ell_1 + 0,8\ell_3 = 0 & L_1 \\ 0,1\ell_1 - 0,5\ell_2 = 0 & L_2 \\ 0,5\ell_2 - 0,8\ell_3 = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ell_1 = 8\ell_3 \\ \ell_2 = \frac{8}{5}\ell_3 \end{cases}, \ \ell_3 \in \mathbb{R}$$

Il reste à choisir ℓ_3 de sorte que ℓ soit stochastique d'où $\ell = \left(\frac{40}{53}, \frac{8}{53}, \frac{5}{53}\right)$

* ——— *

CONNAISSANCES : • connaître les définitions, énoncés des résultats, démonstrations des lemmes, propositions et corollaires

• comprendre les démonstrations des théorèmes.

COMPÉTENCES : • reconnaître les matrices stochastiques, primitives, irréductibles

• savoir utiliser les théorèmes de Perron et Frobenius

• savoir calculer l'état limite associé à une matrice stochastique primitive.

Application : classement des pages web par google...

- Notons $(x_i)_{i \in I}$ l'ensemble des pages web
- $n = \mathrm{Card}\, I \geqslant 10^{10}$ actuellement...
- On forme un graphe pondéré de la manière suivante :

$$x_i \longrightarrow x_j$$

signifie que la page x_i pointe vers la page x_j.

- On note d_i le nombre de liens sur la page d_i. Si on clique au hasard, on a donc $\frac{1}{d_i}$ chances d'atterrir sur la page x_j.

- On forme la matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi :

$$L = (l_{ij})_{ij} \quad \text{où} \quad l_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{si } x_i \longrightarrow x_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $x_i \longrightarrow x_j$, alors $\sum_j l_{ij} = 1$

Si x_i ne pointe pas sur x_j $\sum_j l_{ij} = 0$

$\leadsto$ ainsi L n'est pas stochastique.

- On modifie L ainsi : si x_i ne pointe pas vers x_j on pose $l_{ij} = \frac{1}{N}$.

Ainsi L est stochastique !

- Mais L n'est toujours pas primitive !
- On modifie encore L en la "matrice de google" suivante :
  - soit $\alpha \in]0,1[$
  - posons $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $E = (e_{ij})_{i,j}$ avec $e_{ij} = \frac{1}{N}$

Posons

$$G = \alpha L + (1 - \alpha) E$$

Alors G est stochastique et strictement positive, donc primitive

Il existe donc un état limite, appelé "vecteur de google".

Problème pratique : comment choisir α ?

→ α proche de 1 pour que G ressemble à L

→ pas trop proche sinon le calcul de l'état limite est trop long.

En pratique $\alpha = 0,85$ est utilisé...