

## Feuille d'exercices d'analyse

### Suites numériques

#### Exercice n°1

Étudier la nature des suites  $(u_n)$  définies par:

$$a) u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \quad b) u_n = \frac{n + (-1)^n}{n + \ln n}; \quad c) u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ pour } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$d) u_n = \frac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}; \quad e) u_n = \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

#### Exercice n°2

Calculer la limite des suites:

$$a) u_n = \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=1}^n k}; \quad b) u_n = \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3}$$

#### Exercice n°3

Étudier la nature des suites  $(u_n)$  définies par:

$$a) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}; \quad b) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + k}}; \quad c) u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$$

#### Exercice n°4

Étudier la nature des suites  $(u_n)$  définies par:

$$a) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}; \quad b) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}; \quad c) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

#### Exercice n°5

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent-elles?

$$a) u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}; \quad b) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

#### Exercice n°6

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ . Montrer que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont adjacentes. Conclusion?

#### Exercice n°7

Étudier la nature des suites  $(u_n)$  définies par:

$$a) u_{n+1} = -2u_n + 1; \quad b) u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2; \quad c) u_{n+1} = iu_n + 1 - i$$

**Exercice n°8**

Étudier la nature des suites  $(u_n)$  définies par:

$$a) \quad u_0 = -1, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n; \quad b) \quad u_0 = 2, \quad u_1 = 2(1 + i\sqrt{3}), \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$$

**Fonctions continues****Exercice n°9**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , admettant une période strictement positive  $t$ . Montrer que si  $f$  a une limite en  $+\infty$ , alors  $f$  est constante.

**Exercice n°10**

Soit  $k$  un réel strictement positif et différent de 1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,  $f(kx) = f(x)$ . Montrer que si  $f$  est continue à l'origine, elle est constante.

**Exercice n°11**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On note  $E = \{x \in [a, b] \mid f(x) = 0\}$ . Montrer que si  $E$  n'est pas vide, alors  $\sup E$  est un élément de  $E$ .

**Exercice n°12**

- 1) Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer qu'il existe  $x$  dans  $[0, 1]$  tel que  $f(x) = x$ .
- 2) Soit  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que  $f(0) = f(2)$ . Montrer que l'équation  $f(x) = f(x+1)$  a au moins une solution.

**Exercice n°13**

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que  $f$  admet la même limite finie  $\ell$  en  $a$  et  $b$ . Montrer que  $f$  n'est pas injective sur  $]a, b[$ .

**Exercice n°14** (d'après CAPES 1993)

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et ayant une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée sur  $[0, +\infty[$  et atteint au moins une de ses bornes.

**Exercice n°15**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que pour tout  $x > 0$ ,  $|f(x)| < x$ . Calculer  $f(0)$ . Montrer qu'à tout couple  $(a, b)$  de réels vérifiant  $0 < a < b$ , on peut associer un nombre  $k$  de  $]0, 1[$  tel que, pour tout  $x$  de  $]a, b[$ ,  $|f(x)| \leq kx$ . Est-ce vrai pour les couples  $(0, b)$  ?

**Exercice n°16**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue.

- 1) Montrer que  $|f|$  est uniformément continue.
- 2) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha_0 > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait :

$$\forall x \in [n\alpha_0, (n+1)\alpha_0], \quad |f(x)| < 1 + |f(n\alpha_0)|$$

- 3) En déduire qu'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq ax + b$ .
- 4) Utiliser 3) pour étudier la continuité uniforme de  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ .

5) La condition 3) est-elle suffisante pour avoir la continuité uniforme ?

**Exercice n°17**

1) a) Montrer que les fonctions  $f : x \mapsto e^{-x}$  et  $g : x \mapsto |x|$  sont convexes sur  $\mathbb{R}$ .

b) Soit  $h : x \mapsto e^{-|x|}$ . Vérifier que  $h(0) > \frac{1}{2}(h(1) + h(-1))$ .  $h$  est-elle convexe sur  $\mathbb{R}$  ?

2) Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexes. On pose  $h = f \circ g$ .

a) Peut-on affirmer que  $h$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  ?

b) On suppose en outre  $f$  croissante sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $h$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice n°18**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et bornée.

1) Soit  $a$  un réel quelconque. On pose  $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

a) Montrer que  $g_a$  est croissante sur  $]a, +\infty[$  (on pourra, pour  $a < x < y$ , écrire  $x$  sous la forme  $x = ta + (1-t)y$ , pour un  $t$  convenablement choisi).

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = 0$ .

b) En déduire que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$  est aussi convexe et bornée. Qu'en déduit-on pour  $f$  ?

3) Énoncer un résultat résumant cet exercice.

Fonctions dérivables - Formules de Taylor

**Exercice n°19** (CAPES 2005)

Soient  $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  dérivables. Montrer que  $f$  et  $g$  ont même dérivée logarithmique si et seulement si  $f$  et  $g$  sont proportionnelles.

**Exercice n°20**

Soit  $f : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en 0. On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$ . Montrer que cette suite converge vers  $\frac{1}{2}f'(0)$ .

**Exercice n°21**

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui ne s'annule pas sur  $]a, b[$ . Montrer que si la fonction carrée  $f^2$  est dérivable, il en est de même de  $f$ .

**Exercice n°22**

1) Soit  $\alpha > 0$ . À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ , montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

2) En déduire que la suite donnée par  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  converge pour  $\alpha > 1$ .

**Exercice n°23**

Majorer l'erreur commise en prenant 11 pour valeur approchée de  $\sqrt{123}$ .

**Exercice n°24**

Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $f(-1) = f(1) = 0$ .

Montrer que, pour tout  $\alpha$  de  $] - 1, 1[$ , il existe un polynôme  $P$  de degré  $\leq 2$  tel que la fonction  $g = f + P$  s'annule en  $-1, 1$  et  $\alpha$ . En déduire que  $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{2} f''(c)$  où  $c \in ] - 1, 1[$ , puis que :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1, 1]} |f''(x)|$$

**Exercice n°25**

Soit  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(0) = f'(0) = 0$ . On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que  $g$  est de classe  $C^1$  sur chacun des intervalles  $] - \infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
- 2) Vérifier que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g'(x)$ .
- 4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $f''(0)$ , pour que  $g$  soit de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice n°26** (CAPES 2000)

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$ . Montrer que  $L_n(1) = 2^n n!$  et calculer  $L_n(-1)$ .

**Exercice n°27** (d'après CAPES 2002)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = x f'(\frac{x}{2})$ .

- 1) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) On suppose en outre  $f$  de classe  $C^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ). En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier  $p$  compris entre 1 et  $n$ , on a :  $f^{(p)}(0) = 0$  ou  $p2^{1-p} = 1$ .

**Exercice n°28** (CAPES 1991)

Soit  $f$  une fonction positive, de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $f''$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) On note  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$ .
  - a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction  $f$  que, pour tout couple de réels  $(x, \lambda)$  on a :  $f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M \geq 0$ .
  - b) En déduire que pour tout réel  $x$  on a :  $|f'(x)| \leq \sqrt{2M \cdot f(x)}$ .
- 2) Soit  $x_0$  un réel tel que  $f(x_0) = 0$ . On pose  $g = \sqrt{f}$ .
  - a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $x \neq x_0$ , il existe un réel  $c$  compris entre  $x_0$  et  $x$  tel que :  $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$  (on pourra commencer par remarquer que  $f'(x_0) = 0$ ).
  - b) En déduire que si  $f''(x_0) > 0$ ,  $g$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

**Exercice n°29**

1) Soient  $f$  une fonction convexe et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $a, x \in I$ .

Montrer que  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ . Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette inégalité ?

- 2) Soit  $x > 0$ . On pose  $f(x) = \frac{1}{x}$ . On rappelle que par définition  $\ln(x) = \int_1^x f(t)dt$ . En utilisant la convexité de  $f$  sur  $[1, 2]$ , majorer  $\ln(2)$  par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à la fonction  $f$ , pour  $a = 2$ , minorer  $\ln(3)$  par la surface d'un trapèze. En déduire que  $e \in ]2, 3[$ . ( $e$  est défini par  $\ln(e) = 1$ )

### Exercice n°30

Pour  $x \neq 0$ , on pose  $f(x) = 6 \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

- 1) Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
- 2) Montrer que :  $\forall x \neq 0, \exists \theta \in ]0, 1[, f(x) = \cos(\theta x)$ .
- 3) Montrer que, en travaillant pour  $x$  suffisamment petit (c'est-à-dire pour  $x$  inférieur à un certain  $x_0$ ), on peut assurer l'unicité du  $\theta$  précédent. Prouver que  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

### Exercice n°31

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  ; on suppose que  $\varphi$  et  $\varphi''$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|.$$

Montrer que pour tout réel  $x$  et tout réel  $a > 0$ ,  $|\varphi'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$ .

En déduire que  $\varphi'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et que :  $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$ .

### Exercice n°32

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ . Pour  $k$  dans  $\{0, 1, 2, 3\}$ , on note  $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ . On suppose que  $M_0$  et  $M_3$  sont finis.

- 1) Soient  $x$  un réel et  $h > 0$ .
  - a) Ecrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de  $x$  d'une part pour un accroissement  $+h$  et d'autre part pour un accroissement  $-h$ .
  - b) Résoudre le système linéaire d'inconnues  $f'(x)$  et  $f''(x)$  ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2 \frac{M_3}{6},$$

$$|f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h \frac{M_3}{3}.$$

- 2) Montrer que  $M_1$  et  $M_2$  sont finis.
- 3) En déduire l'existence de constantes  $C_1$  et  $C_2$  (que l'on déterminera) telles que :

$$M_1 \leq C_1 \sqrt[3]{M_0^2 \cdot M_3} \quad \text{et} \quad M_2 \leq C_2 \sqrt[3]{M_0 \cdot M_3^2}$$

### Exercice n°33

On pose  $v_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Montrer que  $|\pi - v_n| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$  (on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0).
- 2) Montrer de même que  $|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}| \leq \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$ .

- 3) Soit  $\lambda$  un nombre réel. On pose  $w_n = \lambda v_{n+1} + (1 - \lambda)v_n$ . Déterminer le réel  $\lambda$  pour que l'on ait, pour tout  $n \in \mathbb{N} : |\pi - w_n| \leq \frac{K}{4^{2n}}$ , o  $K$  est une constante, que l'on précisera.

Théorème du point fixe - Suites récurrentes

**Exercice n°34**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose qu'il existe  $k \in ]0, 1[$  telle que, pour tout  $x : |f'(x)| \leq k$ . Montrer que  $f$  a un unique point fixe (on montrera que  $g : x \mapsto f(x) - x$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ ). Vérifier que  $h : x \mapsto 1 + \ln(\text{ch } x)$  vérifie  $|h'(x)| < 1$  sur  $\mathbb{R}$  mais que  $h$  n'a pas de point fixe.

**Exercice n°35**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ . On définit une suite récurrente par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Établir l'inégalités

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|.$$

- 2) En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Que dire de la limite  $l$ ?

- 3) Trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$  on ait  $|u_n - l| \leq 10^{-5}$ .

**Exercice n°36**

Etudier les suites récurrentes définies par

- 1)  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ .
- 2)  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$ .
- 3)  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$ .
- 4)  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ .

**Exercice n°37** (CAPES 1995)

On définit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par  $a_0 = a \geq 0, b_0 = b \geq 0$  ( $b \neq a$ ),  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  et  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ .

- 1) Montrer que  $(b_n)$  est croissante,  $(a_n)$  décroissante, et que pour tout  $n \geq 1$  on a  $b_n < a_n$ .
- 2) Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites adjacentes.
- 3) Que se passe-t-il si  $a = b$  ?

**Exercice n°38** (d'après CAPES 1998)

Etudier les suites récurrentes définies par  $u_0 \in ]0, 2[$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(4 - u_n^2)$  (point fixe unique mais répulsif).

**Exercice n°39**

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = x - 2 - \ln x$ . Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution dans l'intervalle  $[3, 4]$ . Dans toute la suite, on appelle  $\ell$  cette solution.
- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = 2 + \ln x$ . Montrer que la donnée  $u_0 = 3$  et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier  $n, 3 \leq u_n \leq 4$ .

3) Montrer que pour tout entier  $n$ ,

$$\frac{|u_0 - \ell|}{4^n} \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{3^n}$$

(on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?

Dans la suite de l'exercice, on applique la méthode de Newton pour la résolution de l'équation  $g(x) = 0$ , ce qui conduit à considérer la fonction  $\Phi$  définie pour  $x > 1$  par

$$\Phi(x) = \frac{x(1 + \ell n x)}{x - 1}$$

4) Montrer que  $\Phi(\ell) = \ell$ . Calculer  $\Phi'(x)$  et montrer que  $\Phi'(\ell) = 0$ . Etudier les variations de  $\Phi$ .

5) Montrer que la donnée  $v_0 = 4$  et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \Phi(v_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $v_n \leq 4$ , et que la suite  $(v_n)$  converge vers  $\ell$ .

6) Calculer  $\Phi''(x)$ . En écrivant  $\Phi''(x)$  sous la forme  $\frac{A(x)}{x(x-1)^3}$ , à l'aide de majorations très simples, montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[3, 4]$ ,  $|\Phi''(x)| \leq 2$ .

7) Soit  $v > \ell$  un nombre réel. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, pour la fonction  $\Phi$  entre  $\ell$  et  $v$ . En déduire que pour tout entier  $n$ ,  $|v_{n+1} - \ell| \leq |v_n - \ell|^2$ .