NORME ET EXPONENTIELLE DE MATRICES

I NORMES VECTORIELLES

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

DÉFINITION :

Une norme sur V est une application $N : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall v \in V, \quad N(v) \geq 0$
- $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V \quad N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$
- $\forall (v_1, v_2) \in V \times V \quad N(v_1 + v_2) \leq N(v_1) + N(v_2)$

INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

EXEMPLES :

① Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

② Sur $\mathbb{K}^n$: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

③ Sur $\mathbb{K}^n$: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ on a donc $\|v\|_2 = \sqrt{14}$ $\quad \|v\|_1 = 6$ et $\|v\|_\infty = 3$

Plus généralement $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, est aussi une norme (dite de Hölder).

DÉFINITION

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur V.

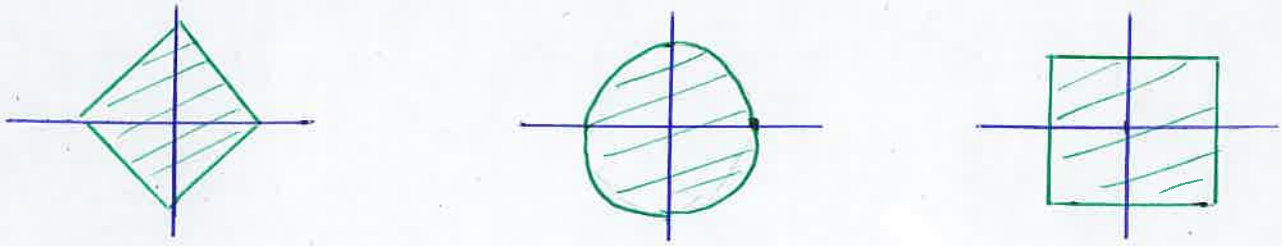
La boule $\left\{\begin{array}{l}\text{fermée}\\ \text{ouverte}\end{array}\right.$ centrée en $v_0 \in V$ de rayon $r>0$ est l'ensemble

$$B(v_0, r) = \{ v \in V : \|v - v_0\| < r \}$$

$$\leq$$

EXEMPLES

Les boules unités dans $\mathbb{R}^2$



$\|\cdot\|_1$ $\qquad$ $\|\cdot\|_2$ $\qquad$ $\|\cdot\|_\infty$

REMARQUES

① Convergence au sens d'une norme :

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in V$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_0 \quad \|v_n - l\| < \varepsilon$$

② Continuité, différentiabilité au sens d'une norme ...

DÉFINITION

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Un produit scalaire sur V est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall v \in V$ $\quad \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ w \mapsto \langle v, w \rangle \end{array}$ est linéaire

  ainsi que $\begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ w \mapsto \langle w, v \rangle \end{array}$ $\Big\}$ bilinéarité

- $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$
- $\forall v \in V \quad \langle v, v \rangle \geq 0$ $\Big\}$ défini positif

- $\forall (v, w) \in V \times V \quad \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ symétrie

V muni d'un produit scalaire est appelé est espace euclidien

REMARQUE Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on remplace la symétrie par

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$ ⇝ espace hermitien

EXEMPLE Le produit scalaire euclidien sur $V = \mathbb{R}^n$

THÉORÈME (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit V un espace vectoriel euclidien. Alors
$\|.\| : v \longmapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ est une norme sur V et

$$\forall (v, w) \in V \times V \qquad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

EXEMPLE

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} {}^t\! A B$

DÉFINITION

Soient N_1 et N_2 deux normes sur V. On dit que N_1 est équivalente à N_2 s'il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall v \in V \qquad N_1(v) \leq C_2 N_2(v) \quad \text{et} \quad N_2(v) \leq C_1 N_1(v)$$

REMARQUE

Les topologies associées sont alors les mêmes ; par exemple, une suite de vecteurs de V converge au sens de N_1 si et seulement si elle converge au sens de N_2.

THÉORÈME

Si V est de dimension finie, toutes les normes sur V sont équivalentes.

→ APPLICATIONS

- $\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est polynomiale en les coefficients des matrices, donc continue. Ainsi $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est ouvert

- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: déjà vu)

En effet, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible pour k assez grand (car $P_A(X)$ a un nombre fini de racines).

II : Exponentielle d'une matrice

[GRIFONE]

1. SUITES ET SÉRIES DE MATRICES

Comme nous l'avons vu $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel normé.
Si $A = \|a_{ij}\|$, on pose :

$$\|A\| := \sqrt{\Sigma_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = Tr(A^* A)$$

On montre facilement que

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

d'où :

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n$$

La vérification de ces inégalités est laissée en exercice.

Les définitions et le propriétés des suites et séries numériques passent facilement à l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ On a par exemple :

1. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice A si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : \|A_n - A\| \leq \varepsilon$$

2. On dit qu'une série de matrices $\Sigma_{n=0}^{+\infty} A_n$ converge si la suite des sommes partielles $S_k = \Sigma_{n=0}^{k} A_n$ converge; dans ce cas, la limite pour $k \to +\infty$ de S_k est dite somme de la série.
3. On dit qu'une série de matrices est absolument convergente si la série numérique $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \|A_n\|$ est convergente.
4. Soient $\Sigma_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\Sigma_{n=0}^{+\infty} B_n$ deux séries de matrices absolument convergentes, de somme respectivement A et B. Alors les séries $\Sigma_{n=0}^{+\infty} (A_n + B_n)$ et $\Sigma_{n=0}^{+\infty} C_n$ (où $C_n = \Sigma_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$) sont convergentes et ont comme somme respectivement $A + B$ et AB.

La démonstration est analogue à celle que l'on donne pour les séries numériques, la valeur absolue étant remplacée par la norme.

2. EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. La série de matrices

$$I_m + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

est absolument convergente, quelle que soit la matrice A. Sa somme est notée e^A.

démonstration: . On a $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. Puisque la série numérique $\Sigma_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ est convergente (sa somme est $e^{\|A\|}$) on en déduit que $\Sigma_{k=0}^{+\infty} \left\|\frac{A^k}{k!}\right\|$ est convergente. Donc $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est une série de matrices absolument convergente. □

Exemples :

- $e^0 = I_m$ (0 étant ici la matrice nulle de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$).
- $e^{\lambda I} = \lambda I + \lambda I + \frac{\lambda^2 I}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^k I}{k!} + \cdots = e^{\lambda} I$

En particulier

$$e^I = eI$$

Proposition

Si A et B commutent, alors

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Démonstration:

En effet, puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme . On a :

$$(A+B)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

donc :

$$e^{A+B} = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \Sigma_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!\,k!(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

$$= \Sigma_{n=0}^{+\infty} \Sigma_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = e^A \cdot e^B$$

□

Corollaire

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, même non inversible, la matrice e^A est inversible et son inverse est e^{-A}.

Démonstration

En effet A et $-A$ commutent, donc $e^A\, e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$.

Proposition

Si $B = P^{-1} A\, P$, alors $e^B = P^{-1} e^A\, P$.

Démonstration

En effet, $B^n = P^{-1} A^n\, P$; donc :

$$\Sigma_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} = \Sigma_{k=0}^{n} \frac{P^{-1} A^k\, P}{k!} = \Sigma_{k=0}^{n} P^{-1} \frac{A^k}{k!} P =$$

$$= P^{-1} \left(\Sigma_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right) P.$$

Il reste à passer à la limite quand $n \to +\infty$. □

Corollaire

$$\text{dét}\,(e^A) = e^{TrA}.$$

Démonstration

En effet, puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable. On a donc $A = P\; B\, P^{-1}$ avec :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Notons que :

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

(*) Ce passage étant justifié par le fait que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & P^{-1} M\, P \end{array}$ est continue.

donc

$$e^A = P\, e^B\, P^{-1} = P \left(I + B + \frac{B^2}{2!} + \cdots + \frac{B^k}{k!} + \cdots \right) P^{-1} =$$

$$P \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \cdots + \frac{\lambda_1^k}{k!} + \cdots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_n + \cdots + \frac{\lambda_n^k}{k!} + \cdots \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

d'où :

$$\text{dét}\, e^A = \text{dét} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\operatorname{Tr} A} \qquad \square$$

Méthode de calcul de e^A par la réduction de Jordan

Lemme

Soit

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix} \quad \textit{avec } A_i \textit{ matrices carrées complexes}$$

Alors :

$$e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & & 0 \\ & \boxed{e^{A_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{e^{A_r}} \end{pmatrix}$$

Ce lemme se démontre facilement en utilisant le fait que

$$A^k = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^k} & & & 0 \\ & \boxed{A_2^k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r^k} \end{pmatrix}$$

Puisque le polynôme caractéristique de A est scindé, A admet une réduction de Jordan : il existe P inversible et

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix} \quad \text{avec } J_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_\alpha \end{pmatrix}$$

telles que $A = P \quad B\, P^{-1}$.

Or $J_\alpha = \lambda_\alpha I + V_\alpha$ et V_α est nilpotente (il existe p tel que $V_\alpha^p = 0$). D'autre part $\lambda_\alpha I$ et V_α commutent, donc :

$$e^{J_\alpha} = e^{\lambda_\alpha I}\, e^{V_\alpha} = e^{\lambda_\alpha}\, I\, e^{V_\alpha} = e^{\lambda_\alpha} \left(I + V_\alpha + \frac{V_\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{V_\alpha^{p-1}}{(p-1)!} \right)$$

ce qui permet, compte tenu du lemme, le calcul effectif de e^A.

3. APPLICATION AUX SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Proposition

Soit $t \in \mathbb{R}$ *; on a :*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A\, e^{tA}$$

Démonstration :

$$\frac{d}{dt}\, e^{tA} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{tA} \cdot \left(\frac{e^{hA} - I}{h} \right)$$

Montrons que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = A$$

(ce qui montre la proposition).

On a :

$$e^{hA} = I + hA + \frac{h^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{h^nA^n}{n!} + \cdots$$

d'où :

$$e^{hA} - I - hA = \frac{h^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{h^nA^n}{n!} + \cdots$$

On en déduit que :

$$\|e^{hA} - I - hA\| \leq \frac{\|hA\|^2}{2!} + \cdots + \frac{\|hA\|^n}{n!} + \cdots = e^{\|hA\|} - 1 - \|hA\|$$

et donc :

$$\|\frac{e^{hA} - I}{h} - A\| \leq \frac{e^{\|hA\|} - 1}{|h|} - \|A\| = \frac{e^{|h|\,\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\|$$

Lorsque $h \to 0$, $\dfrac{e^{|h|\,\|A\|} - 1}{|h|} \sim \|A\|$, d'où $\|\dfrac{e^{hA} - I}{h} - A\| \to 0$ □

Théorème

Soit $\frac{dx}{dt} = A\,x$ un système différentiel linéaire à cœfficients constants $(A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), x \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C}))$. Alors la solution qui pour $t = 0$ prend la valeur x_0 $(x_0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C}))$ est :

$$x(t) = e^{tA}\,x_0$$

En effet soit x défini par $x := e^{tA}\,x_0$. On a $\frac{dx}{dt} = A\,e^{tA}\,x_0 = A\,x$; donc $e^{tA}\,x_0$ est bien solution. D'autre part $x(0) = e^0\,x_0 = I\,x_0 = x_0$; ce qui montre que x vérifie la condition initiale. □

Remarque : Si $m = 1$, on retrouve l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = a\,x \\ x'(0) = x_0 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

Alors $t \mapsto x(t) = x_0 e^{ta}$ est la solution