NORMES MATRICIELLES SUBORDONNÉES
ET
RAYON SPECTRAL

I NORMES SUR LES MATRICES

1) NORMES MATRICIELLES

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $M_m(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

On connait donc $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

DÉFINITION

Une norme matricielle sur $M_m(\mathbb{K})$ est une norme $\|\cdot\|$ sur $M_m(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in M_m(\mathbb{K})^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

EXEMPLES

Exo 1.1

① La norme $\|\cdot\|_1$ est une norme matricielle

② Mais pas $\|\cdot\|_\infty$. Exo 1.2

③ $\|\cdot\|_2$ est aussi une norme matricielle ; elle provient de plus d'un produit scalaire sur $M_m(\mathbb{R})$ (ou hermitien sur $M_m(\mathbb{C})$) donné par

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} {}^tAB.$$

Pour $\|\cdot\|_2$, on le démontre :

PROPOSITION

$\|\cdot\|_2$ est une norme matricielle

démonstration : Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle {}^tL_i, C_j \rangle^2$$

où
- L_i est la i-ème ligne de A
- C_j ——— j-ème colonne de B.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle {}^tL_i, C_j \rangle^2 \leq \|L_i\|^2 \|C_j\|^2$$

Ainsi

$$\|AB\|_2^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} b_{lj}^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j,l=1}^{n} b_{lj}^2 \right)$$

$$= \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2$$

On conclut en utilisant la croissance de $\sqrt{\ }$.

$\square$

REMARQUES

- $\|\cdot\|_2$ est appelée norme de FROEBENIUS
- $\|I_n\|_2 = \sqrt{n}$. On préférerait avoir 1, d'où la section suivante.

2) NORMES SUBORDONNÉES

LEMME

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
L'application $\mathbb{K}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ admet un maximum.

Démonstration

- Pour $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est de norme 1, donc appartient à la sphère S centrée en $0 \in \mathbb{K}^n$, de rayon 1 pour $\|\cdot\|$.

- Cette sphère S est fermée bornée, donc compacte car $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.

- L'application $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|Ax\|$ est continue comme composition d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n & \text{et} & \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ax & & x \longmapsto \|x\| \end{array}$$

$\longrightarrow$ Alors f est bornée sur S, et atteint ses bornes.

$\square$

On en déduit :

DEFINITION

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On appelle **norme matricielle subordonnée à $\|\cdot\|$** l'application

$$|||\cdot||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto |||A||| = \max_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

LEMME

$|||\cdot|||$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

<u>Démonstration</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $|||A||| \geq 0$: ok !

- Si $|||A||| = 0$, alors pour tout $x \neq 0$ on a $\|Ax\| = 0$, d'où $Ax = 0$. C'est aussi vrai pour $x = 0$, et A induit donc l'application nulle sur $\mathbb{K}^n$, d'où A est la matrice nulle.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

  $\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|\lambda A x\| = |\lambda| \, \|Ax\|$

  d'où $\qquad |||\lambda A||| = |\lambda| \cdot |||A|||$

- Pour $x \in \mathbb{K}^n$ on a d'où si $x \neq 0$:

$$\frac{\|(A+B)(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$
$$\leq |||A||| + |||B|||$$

Reste à prendre le maximum à gauche.

- Soit $x \neq 0$ tel que $Bx \neq 0$. Alors

$$\frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \cdot \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq |||A||| \cdot |||B|||$$

(notez que si $Bx = 0$, le terme de gauche est nul)

En passant au maximum à gauche, il vient :

$$|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||.$$

$\square$

REMARQUE

Pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on a $|||I_n||| = 1$

THÉORÈME

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$|||A|||_1 = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}_{\|C_j\|_1 \text{ où } C_j \text{ est la } j\text{-ème colonne de } A}$$

$$|||A|||_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}_{\|L_i\|_1 \text{ où } L_i \text{ est la } i\text{-ème ligne de } A}$$

REMARQUES

- Pour $\|\cdot\|_2$, on verra plus tard...
- Pour $|||\ |||_\infty$, voir Ex 1.2

Démonstration pour $|||\cdot|||_1$

- Soit $x \in \mathbb{K}^m$. Alors

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\,|x_j| \quad \text{par inégalité triangulaire}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) |x_j|$$

$$\leqslant \left(\max_{j \in \{1,\dots,m\}} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |x_j|}_{\|x\|_1}$$

d'où

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leqslant \text{- - -}$$

et donc $\quad |||A|||_1 \leqslant \text{- - -}$.

- Pour montrer l'égalité, on va trouver un $x \in \mathbb{K}^m$ qui réalise l'égalité.

Soit e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^m$.

Alors
$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \cdot \|e_j\|_1$$

Soit j_0 tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} |a_{ij_0}| = \max_{j \in \{1,\dots,m\}} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.

Finalement

$$|||A|||_1 \leqslant \max_j \sum_i |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij_0}| = \frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leqslant |||A|||_1$$

voir ci-dessus

car $|||\cdot|||$ est le maximum

II RAYON SPECTRAL

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on la voit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

DÉFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le rayon spectral, noté $\rho(A)$, est

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} |\lambda| .$$

EXEMPLE

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \rho(A) = 2$

REMARQUE

On va voir que $\rho(A)$ est lié à la convergence des itérés A^k de A.

LEMME

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$. Alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\boxed{\rho(A) \leq |||A|||}$

Démonstration : Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ et $v \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$.

Alors $\|Av\| = |\lambda| \, \|v\|$ d'où $|||A||| \geq \dfrac{\|Av\|}{\|v\|} = |\lambda|$

Ceci étant vrai pour toute valeur propre λ, on a le résultat. $\square$

On a même plus :

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\rho(A) \leq \|A\|$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée $|||\cdot|||$ telle que $\quad |||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Démonstration de la $1^{ère}$ partie

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}^n$ tels que : • $v \in E_\lambda(A)$

• $\rho(A) = |\lambda|$

Choisissons un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ tel que la matrice carrée $v\,{}^t u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est non nulle. (il y a plein de choix pour u)

Alors

$$\rho(A)\, \|v.{}^t u\| \underset{\substack{\uparrow \\ \rho(A) = |\lambda|}}{=} \|\lambda v.{}^t u\| \underset{\substack{\uparrow \\ v \in E_\lambda(A)}}{=} \|Av.{}^t u\| \underset{\substack{\uparrow \\ \|.\| \text{ est matricielle.}}}{\leq} \|A\| \cdot \|v.{}^t u\|$$

Il reste à simplifier par $\|v.{}^t u\| \in \mathbb{C}^*$.

REMARQUE : la démonstration de la 2^{nde} partie est plus technique (fait appelle à triangularisation). $\square$

On va établir un lien entre ρ et $\|.\|_2$. D'abord

LEMME

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Notons R_A l'application

$$R_A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{{}^t x A x}{\underbrace{{}^t x\, x}_{= \|x\|_2^2}} = \langle x, Ax \rangle$$

Alors

$$\sup_{x \neq 0} R_A(x) = \rho(A)$$

REMARQUE : R_A est apelé "quotient de RAYLEIGH".

Démonstration

- $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$ {}^tOAO = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n. $$

- Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de O. Ainsi $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

- Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Il existe $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$ v = \sum_{i=1}^{n} c_i C_i $$

- Posons $w = {}^tOv$. Alors $w = {}^tOv = \sum_{i=1}^{n} c_i \, {}^tOC_i = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

- Calculons $R_A(v)$:

$$ R_A(v) = \frac{{}^tv A v}{{}^tv v} = \frac{{}^tw \, {}^tOAO \, w}{{}^tw \, {}^tOO w} = \frac{{}^tw D w}{{}^tw w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} $$

$$ \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_n c_i^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} = \lambda_n $$

$\lambda_i \leq \lambda_n$

et de plus la valeur λ_n est atteinte par $w = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $v = C_n$.

<u>Conclusion</u> : la fonction R_A est majorée par λ_n, et la valeur λ_n est atteinte, donc

$$ \sup_{x \neq 0} R_A(x) = \lambda_n = \rho(A) $$

les valeurs propres sont positives

$\square$

Voici le lien entre ρ et $|||\cdot|||_2$.

THÉORÈME

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

REMARQUE

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors le résultat devient $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\bar{A}A)}$.

Démonstration

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ non nul. Alors

$$\left(\frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}\right)^2 = \frac{{}^t(Av)\cdot Av}{{}^tvv} = \frac{{}^tv\,{}^tAA\,v}{{}^tvv} = R_{{}^tAA}(v)$$

Ainsi

$$|||A|||_2^2 = \sup_{v\neq 0} R_{{}^tAA}(v) = \rho({}^tAA)$$

d'après le lemme précédent. Ainsi $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ $\square$

(un des) Intérêt(s) du rayon spectral : étude de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$

RAPPEL : convergence et norme

→ sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

→ choisissant $\|\cdot\|_\infty$, la convergence d'une suite de vecteurs (ou de matrices) revient à la convergence coefficient par coefficient.

THÉORÈME

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\lim_{k \to \infty} A^k = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(ii) Pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\lim_{k \to \infty} A^k v = 0 \in \mathbb{C}^n$

(iii) $\rho(A) < 1$

(iv) Il existe une norme matricielle subordonnée telle que $|||A||| < 1$

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$. Alors, pour $v \in \mathbb{C}^n$, on obtient :

$$\|A^k v\| \leq |||A^k||| \, \|v\|$$

où $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.

Or $\lim_{k \to \infty} |||A^k||| = 0$ d'après (i), d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Par la contraposée. Supposons $\rho(A) \geq 1$. Il existe donc $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ et $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tels que $|\lambda| \geq 1$ et $Av = \lambda v$. On en déduit $A^k v = \lambda^k v$.

Or $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $0 \in \mathbb{C}$

donc $(\lambda^k v)_{k \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $0 \in \mathbb{C}^n$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) D'après la proposition (page 7), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $|||\cdot|||$ telle que $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$. Choisissons ε tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|||A^k||| \leq |||A|||^k$ car $|||\cdot|||$ est une norme matricielle.

$\square$

III CONDITIONNEMENT

Étudions un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

On a $\det A = 1$, donc A est inversible. En particulier pour tout $B \in \mathbb{R}^4$, le système $AX = B$ admet une unique solution $X = A^{-1}B$. exemple Pour $B = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$ on trouve $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

De plus . A est "raisonnable" : symétrique, $\det A = 1$

. A^{-1} est simple aussi : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Et pourtant ... Perturbons le système linéaire et étudions la solution :

* changeons B en $B' = B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$. La solution devient $X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ une erreur relative de $\dfrac{\|B'-B\|_\infty}{\|B\|_\infty} = \dfrac{0,1}{33} \simeq 0,003$ provoque une erreur relative de $\dfrac{\|X-X'\|}{\|X\|} = 13,6$, soit une amplification de l'erreur de $\dfrac{13,6}{0,003} \simeq 4530$!!!

* Changeons A en

$$A' = A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}$$

La solution de $A'X = B$ devient $X'' = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Ici $\dfrac{\|A'-A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \simeq 0,02$ et $\dfrac{\|X-X''\|_\infty}{\|X\|_\infty} = 136$,

d'où une amplification de 6800 environ !

Pour étudier ce phénomène, on introduit :

DÉFINITION

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$. Le conditionnement de $A \in GL_n(\mathbb{C})$ est le nombre

$$\operatorname{cond}(A) = |||A|||.\,|||A^{-1}|||.$$

REMARQUE

Le conditionnement dépend du choix de la norme $\|\cdot\|$. Pour autant, pour un autre choix, les résultats sont comparables...

EXEMPLES

1) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où

$$\operatorname{cond}_\infty A = |||A|||_\infty . |||A^{-1}|||_\infty = 2 \times 3 = 6. \quad \left(|||A|||_\infty = \max_{\text{lignes}} \sum_j |a_{ij}| \right)$$

2) Dans l'exemple introductif $\operatorname{Cond}_\infty A = 4352$

LEMME

Soit $A \in GL_m(\mathbb{C})$. Alors (i) $\text{Cond}\, A = \text{Cond}\, A^{-1}$

(ii) $\text{Cond}(\lambda A) = \text{Cond}\, A$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $\text{Cond}\, A \geqslant 1$

Démonstration

(i) clair !

(ii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

(iii) $1 = ||| I ||| = ||| A . A^{-1} ||| \underset{\text{norme matricielle}}{\leqslant} ||| A |||. ||| A^{-1} ||| = \text{Cond}\, A$ □

On utilise le conditionnement pour estimer les erreurs de calculs.

THÉORÈME 1

Soit $A \in GL_m(\mathbb{C})$, et soient $B, B' \in \mathbb{C}^m$ avec $B \neq 0$. On note X et X' les solutions de $AX = B$ et $AX' = B'$. Alors

$$\underbrace{\frac{\| X - X' \|}{\| X \|}}_{\text{erreur relative sur la solution}} \leqslant \text{cond}\,(A) \underbrace{\frac{\| B - B' \|}{\| B \|}}_{\text{erreur relative sur la donnée du second membre}}$$

Démonstration On a $A(X - X') = B - B'$ d'où $X - X' = A^{-1}(B - B')$

On en déduit
$$\| X - X' \| \leqslant ||| A^{-1} |||. \| B - B' \|$$

De même $AX = B$ entraine $\| B \| \leqslant ||| A |||. \| X \|$

On obtient ainsi
$$\frac{\| X - X' \|}{\| X \|} \leqslant ||| A^{-1} |||. \| B - B' \| . \frac{||| A |||}{\| B \|} = \text{Cond}\, A . \frac{\| B - B' \|}{\| B \|}$$ □

THÉORÈME 2

Soit $A \in GL_m(\mathbb{C})$ et $B \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Soit $A' \in GL_m(\mathbb{C})$ et notons X et X' les solutions de $AX = B$ et $A'X' = B$.

Alors

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X'\|} \leq \operatorname{Cond} A \, \frac{|||A - A'|||}{|||A|||}$$

et

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leq \operatorname{Cond} A \, \frac{|||A - A'|||}{|||A|||} \left(1 + O(|||A - A'|||)\right)$$

erreur relative sur la solution

Démonstration

- De $AX = B = A'X'$ on déduit $0 = A(X - X') + (A - A')X'$

Ainsi $X - X' = -A^{-1}(A - A')X'$

et $\|X - X'\| \leq |||A^{-1}||| \cdot \dfrac{|||A - A'|||}{|||A|||} \cdot \|X'\| \cdot |||A|||$

d'où $\boxed{\dfrac{\|X - X'\|}{\|X'\|} \leq \operatorname{Cond} A \cdot \dfrac{|||A - A'|||}{|||A|||}}$.

- De même $0 = (A - A')X + A'(X - X')$

et $X - X' = -A'^{-1}(A - A')X$

d'où $\|X - X'\| \leq |||A'^{-1}||| \cdot |||A - A'||| \cdot \|X\| \cdot \dfrac{\operatorname{Cond} A}{|||A||| \cdot |||A^{-1}|||}$

et $\dfrac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leq \operatorname{Cond} A \cdot \dfrac{|||A - A'|||}{|||A|||} \cdot \dfrac{|||A'^{-1}|||}{|||A^{-1}|||} \longrightarrow 1$ quand $A' \to A$

$\square$

FIN

CONNAISSANCES :

- normes matricielles subordonnées (+ cas $|||\cdot|||_\alpha$ avec $\alpha = 1, 2, \infty$)
- rayon spectral, lien avec étude de $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$
- conditionnement d'une matrice.

COMPÉTENCES :

- savoir calculer $|||A|||_\alpha$ avec $\alpha = 1, 2, \infty$.
- ―――――――― $\rho(A)$
- étudier la convergence de $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers 0
- utiliser le conditionnement d'une matrice.