MOINDRES CARRÉS

EXEMPLE INTRODUCTIF

Un astéroide en orbite autour du soleil a pu être observé pendant quelques jours avant de disparaître. Voici dix observations effectuées:

$x_1 := -1.024940, x_2 := -0.949898, x_3 = -0.866114, x_4 = -0.773392, x_5 = -0.671372, x_6 = -0.559524, x_7 = -0.437067, x_8 = -0.302909, x_9 = -0.155493, x_{10} = -0.007467$

$y_1 = -0.389269, y_2 = -0.322894, y_3 = -0.265256, y_4 = -0.216557, y_5 = -0.177152, y_6 = -0.147582, y_7 = -0.128618, y_8 = -0.121353, y_9 = -0.127348, y_{10} = -0.148885$

On souhaite déterminer la trajectoire de l'astéroide à partir de ces observations, afin de pouvoir prédire l'instant où son orbite sera à nouveau visible. On suppose un modèle ellipsoidal pour l'orbite :

$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + e\ .$$

On cherche donc à déterminer (a, b, c, d, e) tel que $A.\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = V = [x_i^2]$ où $A = \left([y_i^2, x_iy_i, x_i, y_i, 1]\right)_{i\in\{1,\dots,10\}}$ est de taille $(10, 5)$.

- Le système est surdéterminé : 10 équations pour 5 inconnues
  $\rightsquigarrow$ pas de solution en général
- Pourtant, physiquement, on a existence et unicité de la solution !
  En tout cas : – si les observations sont exactes
  – la trajectoire est bien une ellipse
- Mais il y a des erreurs (d'observation, de calcul, de modèle, ...)
  donc il est peu probable que le système admette une solution.

On change de point de vue : on cherche (a,b,c,d,e) qui rende minimale la somme des carrés des erreurs :

$$\sum_{i=1}^{10} \left(x_i^2 - a y_i^2 - b\, x_iy_i - cx_i - dy_i - e\right)^2$$

"problème des moindres carrés"

I LA PROBLÉMATIQUE

- Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$, et soit $B \in \mathbb{R}^m$
- Le système
$$AX = B$$
est surdéterminé dès que $m > n$.
- Un tel système n'admet pas de solution en général. Il en admet si $B \in \operatorname{Im} A$. Or
$$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} A = n - \dim \ker A \leq n$$
alors que $B \in \mathbb{R}^m$ vit dans un espace de dimension m.

On cherche alors $X \in \mathbb{R}^n$ tel que la norme $\|AX - B\|_2$ soit la plus petite possible, ce qui équivaut à :

- AX est le projeté orthogonal de B sur $\operatorname{Im} A$ (d'après le cours sur l'orthogonalité)

$\iff$ $AX - B$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$ (même raison)

$\iff$ $\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad \langle AY, AX - B \rangle = 0$ (même raison)

$\iff$ $\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Y, {}^tAAX - {}^tAB \rangle = 0$ (définition adjoint)

$\iff$ ${}^tAAX = {}^tAB$ (car $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$)

Est-ce que ce nouveau système admet des solutions ?

REMARQUE

On appelle problème des moindres carrés associé à $AX = B$ la question de trouver un vecteur minimisant la distance $\|AX - B\|_2$.

LEMME

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors le rang de A est égal au rang de ${}^tA A$.

Démonstration

- Montrons $\ker A = \ker {}^tAA \subseteq \mathbb{R}^n$
  - L'inclusion $\ker A \subseteq \ker {}^tAA$ est immédiate.
  - Soit $X \in \ker {}^tAA$. Alors ${}^tAAX = 0 \in \mathbb{R}^n$ d'où

    $0 = {}^tX\,{}^tAAX = \|AX\|_2^2$

    Ainsi $AX = 0$ d'où $X \in \ker A$.
- Finalement d'après le théorème du rang

$$\operatorname{rg} A = n - \dim \ker A = n - \dim \ker {}^tAA = \operatorname{rg} {}^tAA$$

$\square$

REMARQUES

① Notons que $\operatorname{Im} A \subseteq \mathbb{R}^m$, alors que $\operatorname{Im} {}^tAA \subseteq \mathbb{R}^n$.
Par contre l'espace de départ des applications linéaires associées à A et ${}^tAA$ dans les bases canoniques est bien le même espace, à savoir $\mathbb{R}^n$.

② Si $\operatorname{rg} A = n$ (dit autrement : les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants), alors ${}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée de rang n, donc est inversible.
Par conséquent le système ${}^tAAX = {}^tAB$ admet une (unique) solution, ce qui donne une (unique) solution au problème des moindres carrés.

Que se passe-t-il dans le cas général.

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. Le système ${}^tAAX = {}^tAB$ admet une solution.

Si de plus $\operatorname{rg} A = n$, elle est unique.

Démonstration

. On vient de traiter le cas $\operatorname{rg} A = n$.

. Dans le cas général, le système ${}^tAAX = {}^tAB$ admet une solution si et seulement si le vecteur ${}^tAB$ appartient à l'image de ${}^tAA$. On va montrer que c'est toujours le cas. Plus précisément, on a $\operatorname{Im} {}^tAA = \operatorname{Im} {}^tA$.

En effet : * l'inclusion $\operatorname{Im} {}^tAA \subseteq \operatorname{Im} {}^tA$ est claire.

* $\dim \operatorname{Im} {}^tAA = \operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$ d'après le cours sur la dualité, et finalement $\operatorname{Im} {}^tAA$ et $\operatorname{Im} {}^tA$ ont la même dimension.

Ainsi $\operatorname{Im} {}^tAA = \operatorname{Im} {}^tA$ et la proposition est démontrée.

□

Ainsi, le problème des moindres carrés admet toujours (au moins) une solution.

REMARQUE

Si $B \in \operatorname{Im} A$, le système $AX = B$ admet une solution exacte (qui sera aussi une solution au sens des moindres carrés).

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ Déjà $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \not\ni B$

Par exemple la matrice $(A \mid B)$ est de rang 3. On peut le voir en calculant le mineur 3×3 du haut qui vaut $-12 \neq 0$.

Le système linéaire $AX = B$ n'admet donc pas de solution exacte

→ $\operatorname{rg} A = 2$ (les colonnes de A ne sont pas proportionnelles), donc la solution au problème des moindres carrés est unique.

→ Calculons $\;{}^tAA = 6\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\;$ et $\;{}^tAB = 6\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et résolvons $\;{}^tAA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tAB$

Il vient $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 7y = -1 \end{cases}$

qui équivaut à

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 6y = -2 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} x = 4/3 \\ y = -1/3 \end{cases}$

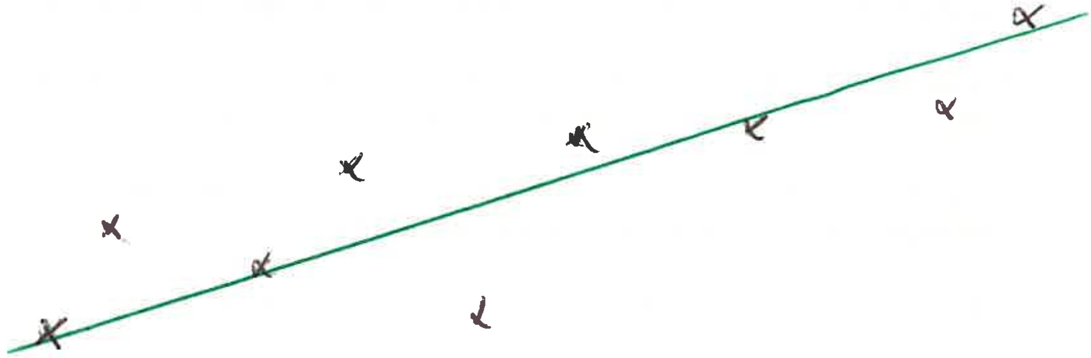
→ La solution du système $AX = B$ au sens des moindres carrés est donc $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

→ L'erreur commise est $\left\| A\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - B \right\|_2 = 2\sqrt{5}$.

II DROITE DE RÉGRESSION

Considérons un nuage de points dans le plan, i.e. une collection de points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, avec $i \in I$ un ensemble fini.

Imaginons que ce nuage se répartisse grosso-modo le long d'une droite :



PROBLÈME : trouver une droite approchant "le mieux possible" le nuage de points. "droite de régression"

REMARQUE

C'est un problème classique en statistique, avec applications pratiques (estimation de l'évolution d'une donnée, ...)

DÉFINITION

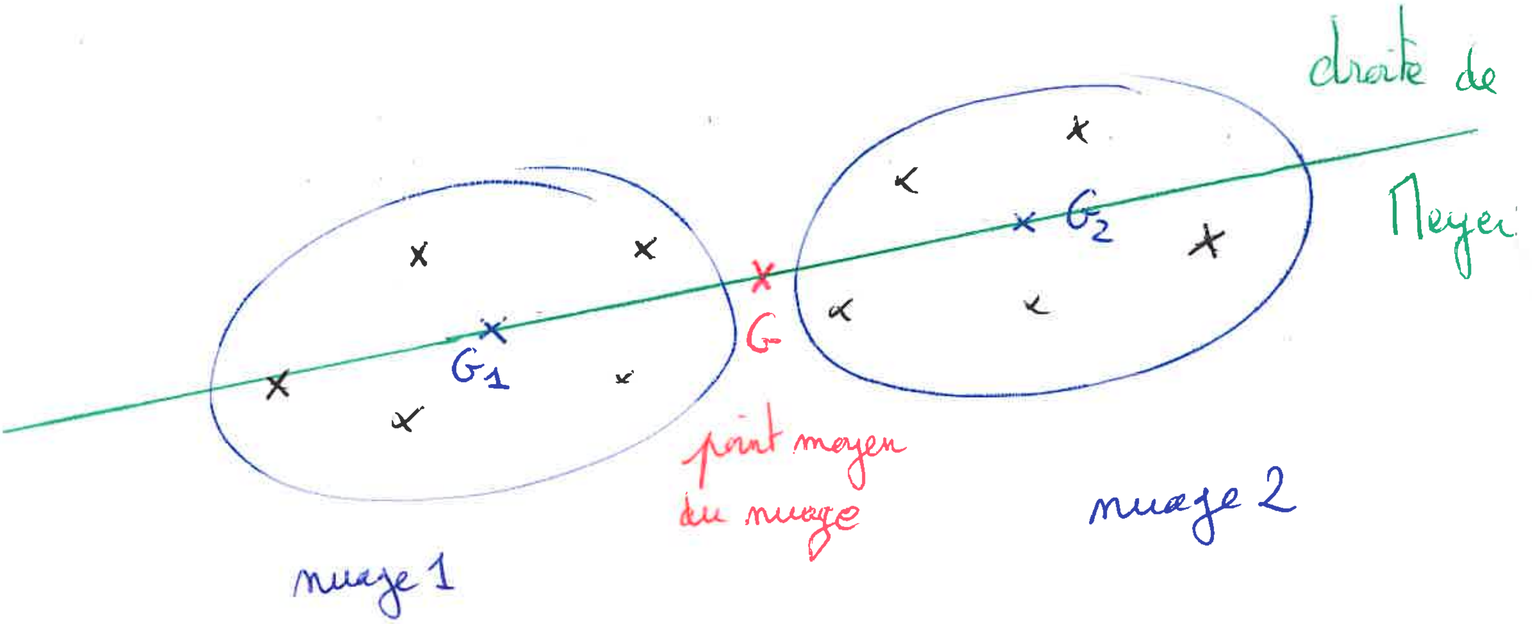
On appelle point moyen du nuage $\left\{ \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i \in I \right\}$, noté $G \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$, l'isobarycentre de l'ensemble des points, i.e. :

$$\bar{x} = \frac{1}{\operatorname{card} I} \sum_{i \in I} x_i$$ moyenne des x_i, $i \in I$

$$\bar{y} = \frac{1}{\operatorname{card} I} \sum_{i \in I} y_i$$ moyenne des y_i, $i \in I$

Une solution simple au problème est la <u>droite de Meyer</u> :

- on classe les points dans l'ordre croissant par rapport à la variable x
- on sépare le nuage en deux nuages ayant autant de points (si card I est pair, sinon un des nuages a un point de plus).
- on calcule les points moyens G_1 et G_2 de chacun des nuages
- la droite $(G_1 G_2)$ est la droite de Meyer.



REMARQUE

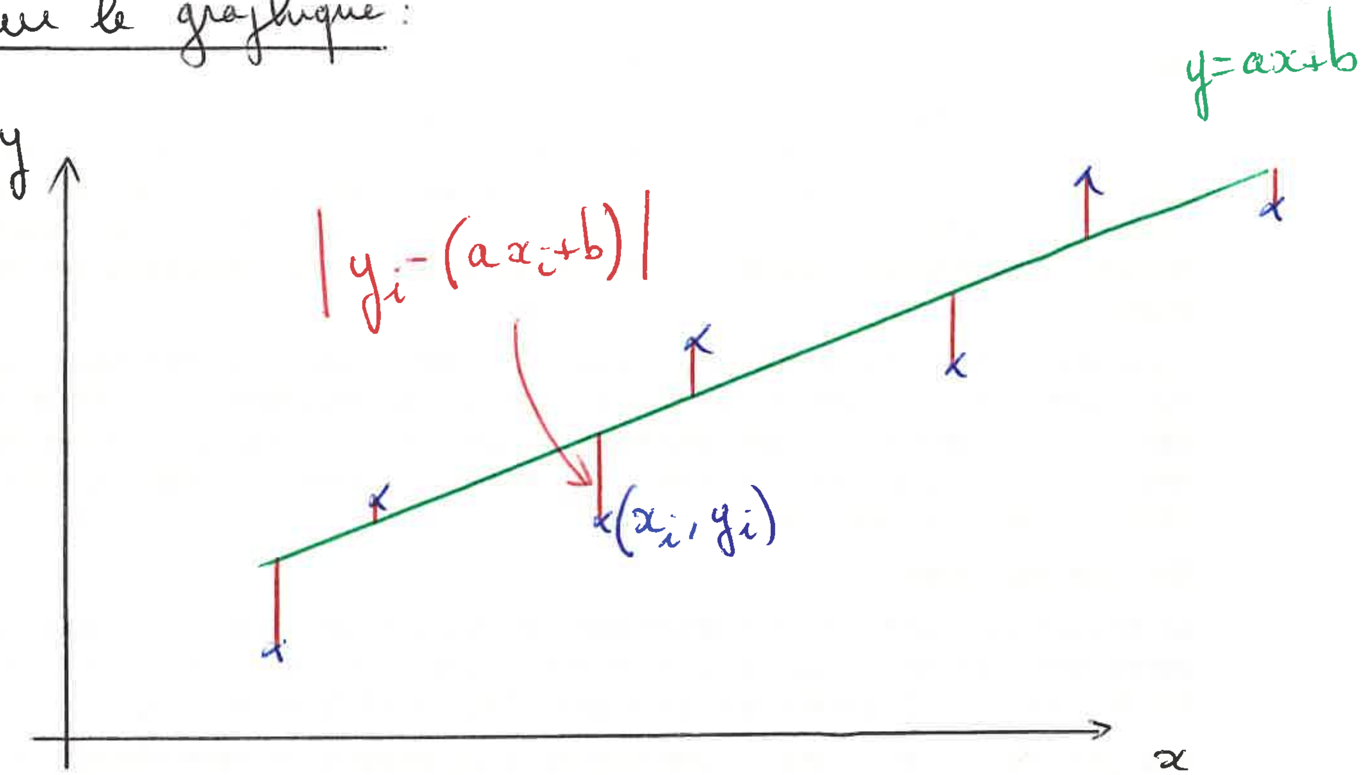
La droite de Meyer passe par le point moyen du nuage par associativité du barycentre.

On va s'intéresser à un ajustement plus précis : trouver une droite qui minimise l'erreur au sens des moindres carrés : trouver $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ correspondant à la droite d'équation $y = ax + b$ tel que l'erreur

$$\sum_{i \in I} (y_i - (ax_i + b))^2$$

soit minimale.

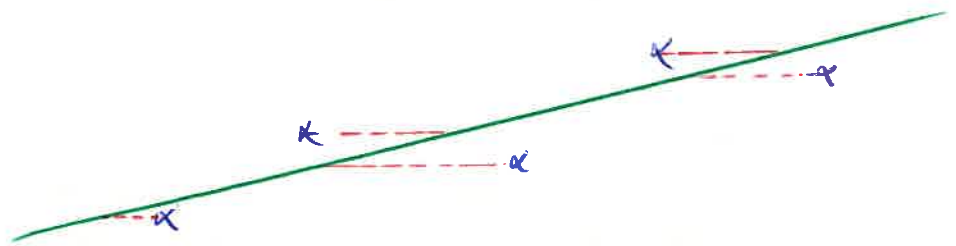
Sur le graphique :



On cherche donc à minimiser la somme des carrés des longueurs en rouge. On parle de droite de régression de y en fonction de x.

RENARQUE

On peut aussi étudier la droite de régression de x en fonction de y. On cherche alors à minimiser la somme des carrés des longueurs en rouge pointillé :



Il s'agit donc de résoudre le problème aux moindres carrés suivant ; notons $I = \{1, \ldots, m\}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{B}$$

- Le rang de A est 2 à moins que tous les x_i soient égaux. Mais alors le nuage est aligné verticalement (voire est un point)...

C'est ce qu'on supposera désormais. On a alors unicité de la solution au sens des moindres carrés.

- Calculons ${}^tAA$ et ${}^tAB$.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & m\bar{x} \\ m\bar{x} & m \end{pmatrix}$$

et

$${}^tAB = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ m\bar{y} \end{pmatrix}$$

- Calcul de $({}^tAA)^{-1}$:

$$({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{m\sum_i x_i^2 - m^2\bar{x}^2} \begin{pmatrix} m & -m\bar{x} \\ -m\bar{x} & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - m\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2} \\ b = \dfrac{\bar{y}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{m} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2} \end{cases}$$

DÉFINITION

La droite d'équation $y = ax + b$ est appelée droite de régression linéaire au sens des moindres carrés du nuage de points.

REMARQUES

① On vérifie que cette droite passe par le point moyen :

$$b = \frac{\left(\bar{y}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{y}\bar{x}^2\right) + \left(m\bar{y}\bar{x}^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right)}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2}$$

$$= \bar{y} - a\bar{x} \qquad \text{soit} \qquad \bar{y} = a\bar{x} + b$$

② On peut simplifier l'expression de a (et/ou b) en utilisant les notions de variance et covariance :

$$\mathrm{Var}(X) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{variance de } X = \{x_1, \dots, x_m\}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad \text{covariance}$$

Alors $\boxed{a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}\, X}}$ et $\boxed{b = \bar{y} - a\bar{x}}$

Régression linéaire : introduction

But : établir un lien entre une variable dépendante Y et une variable indépendante X pour pouvoir ensuite faire des prévisions sur Y lorsque X est mesurée.

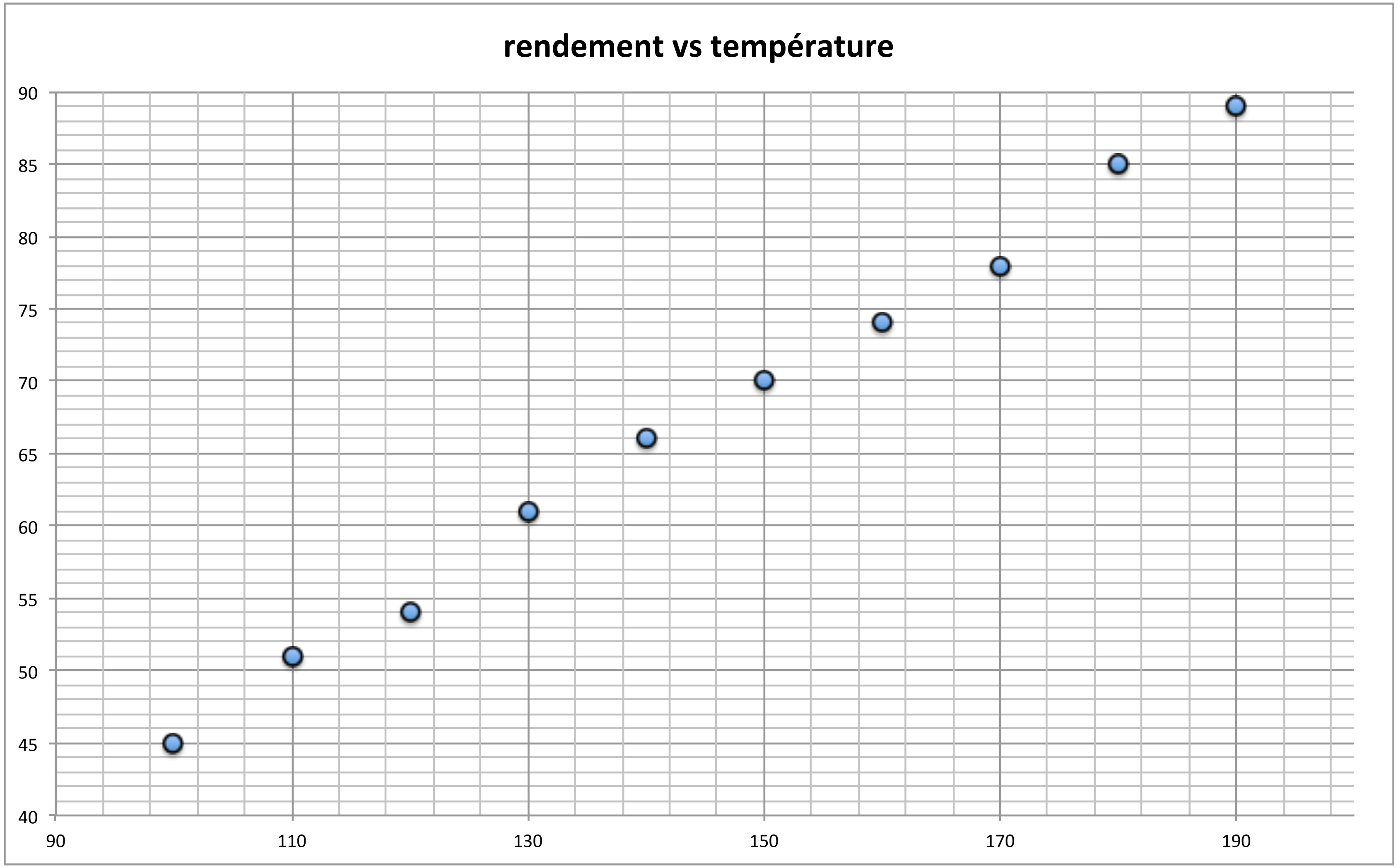
Exemple 1

L'analyse de la température de fonctionnement d'un procédé chimique sur le rendement du produit a donné les valeurs suivantes pour la température X_i et le rendement correspondant Y_i :

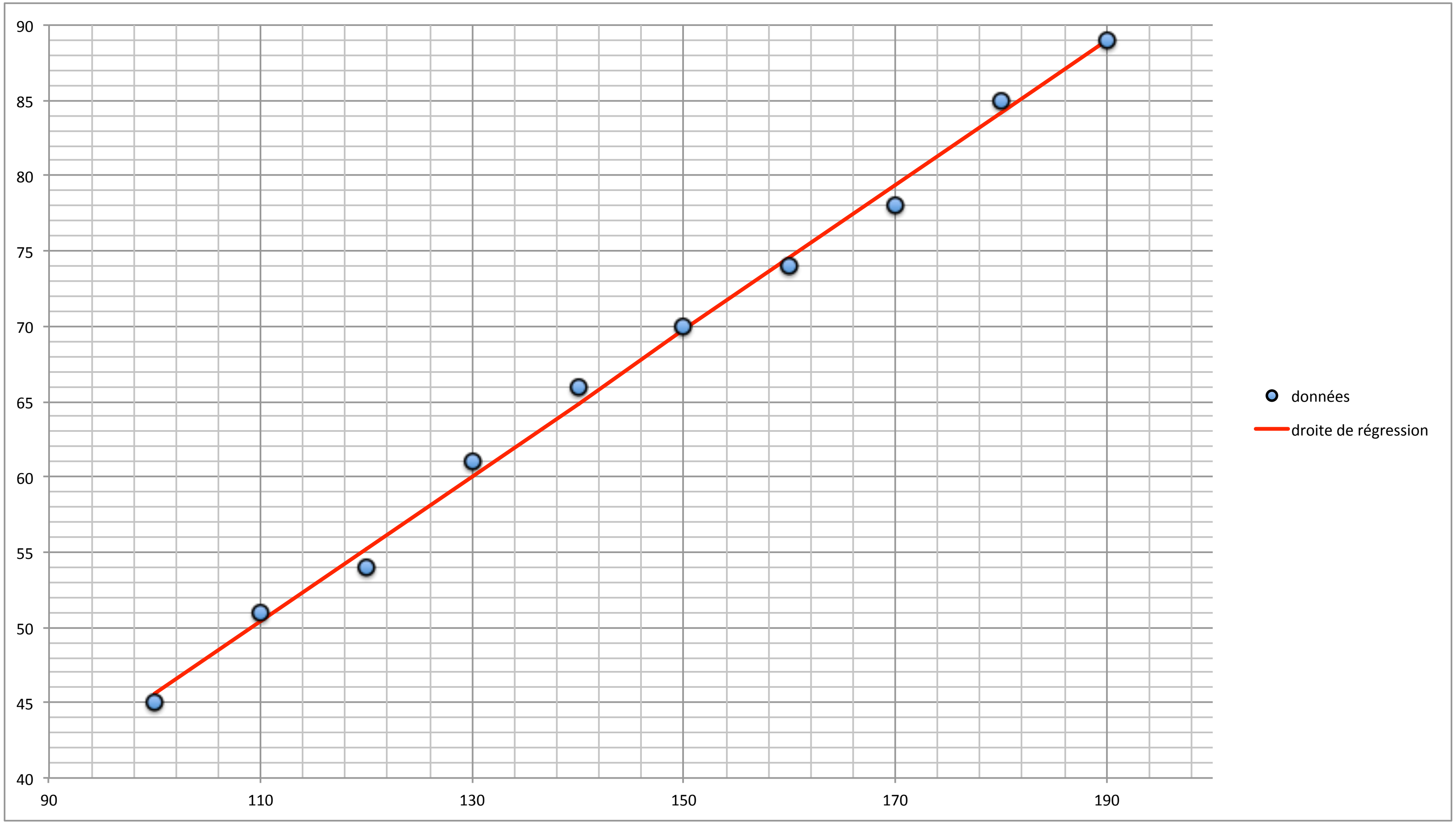
Température °C	Rendement %	Température °C	Rendement %
100	45	150	70
110	51	160	74
120	54	170	78
130	61	180	85
140	66	190	89

Exemple 1 (suite)

Le graphe ci-dessous représente les points (X_i, Y_i) pour ces données et suggère une relation linéaire entre X et Y.



Droite de régression pour l'exemple 1



Voir fichier Excel.

REMARQUE

- Le nuage étudié n'a pas toujours une forme de droite !

Mais il se peut qu'il ait une forme exponentielle par exemple :

On considère alors le nuage $\left\{ \begin{pmatrix} x_i \\ \ln y_i \end{pmatrix}, i \in I \right\}$ (si $y_i > 0$)

auquel on applique la régression linéaire.

On peut faire de même avec toute fonction bijective ...

III LIEN AVEC LA DÉCOMPOSITION QR

- Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$.
- On applique le procédé de Gram-Schmidt aux n vecteurs colonnes de A pour obtenir une famille orthonormée (mais pas une base si $m > n$) de vecteurs de $\mathbb{R}^m$.
- Notons $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice des vecteurs obtenus. Il existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que

$$A = QR$$

$$\Big(\quad\Big) = \underbrace{\Big(\quad\Big)}_{\substack{\text{vecteurs colonnes normés,} \\ \text{et deux à deux orthogonaux.}}} \left(\begin{smallmatrix} & \nabla \\ 0 & \end{smallmatrix}\right)$$

REMARQUE

La matrice R est inversible si $\operatorname{rg} A = n$.

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang n.

La solution du système $AX = B$, avec $B \in \mathbb{R}^m$, au sens des moindres carrés est égale à

$$X = R^{-1}\,{}^tQB$$

Il y a unicité car $\operatorname{rang} A = n$

Démonstration

On sait que la solution X cherchée est l'unique solution du système matriciel

$$ {}^tAAX = {}^tAB $$

De plus ${}^tAA$ est inversible car ${}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de même rang que A. Or

$$ \begin{aligned} {}^tAA &= {}^t(QR)\,QR \quad \text{où } A = QR \text{ est la décomposition } QR \text{ de } A \\ &= {}^tR\,{}^tQ\,Q\,R \end{aligned} $$

Notons que ${}^tQQ = I_n$ car les vecteurs colonnes de Q sont normés, et deux à deux orthogonaux, d'où ${}^tAA = {}^tRR$.

Ainsi

$$ \begin{aligned} X &= ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB \\ &= ({}^tRR)^{-1}\,{}^t(QR)\,B \\ &= R^{-1}\,\underbrace{{}^tR^{-1}\,{}^tR}_{I_n}\,{}^tQ\,B \\ &= R^{-1}\,{}^tQ\,B \end{aligned} $$

$\square$

Donc en pratique, pour résoudre le problème aux moindres carrés $AX = B$, on peut :

- calculer la décomposition QR de A (par exemple via le procédé de Gram-Schmidt, mais il existe des méthodes plus efficaces)
- calculer ${}^tQB$
- résoudre le système triangulaire $RX = {}^tQB$

On va maintenant expliquer la méthode de Householder pour obtenir une décomposition QR. Rappelons l'énoncé dans le cas où A est une matrice carrée.

THÉORÈME

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = QR$

REMARQUE

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est rectangulaire avec $m \geq n$ et $\operatorname{rg} A = n$, on la complète en $A' = \left(A \;\vdots\; * \right) \in GL_m(\mathbb{R})$.

On en déduit $Q' \in O_m(\mathbb{R})$ et $R' \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ telles que $A' = Q'R'$

Posons alors $Q' = \left(\underbrace{Q}_{n \text{ premières colonnes}} \;\vdots\; * \right)$ et $R' = \begin{pmatrix} \underbrace{R}_{n} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \Big\}\, n$

Alors $A = QR$.

DÉFINITION

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On appelle matrice de Householder associée à v la matrice

$$H_v = I_n - 2 \frac{v \, {}^t v}{{}^t v . v} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On pose $H_0 = I_n$ dans le cas $v = 0$.

LEMME 1

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors H_v est orthogonale et ${}^tH_v = H_v$.

Démonstration. Calculons déjà ${}^tH_v$:

$${}^tH_v = {}^t\left(I - 2\frac{v\,{}^tv}{{}^tv\,v}\right) = I - 2\frac{{}^t(v\,{}^tv)}{{}^tv\,v} = I - 2\frac{v\,{}^tv}{{}^tv\,v} = H_v$$

- De plus

$${}^tH_v \cdot H_v = H_v^2 = I - 4\frac{v\,{}^tv}{\underbrace{{}^tv\,v}_{\text{c'est un nombre réel}}} + 4\left(\frac{v\,{}^tv}{{}^tv\,v}\right)^2$$

Or $\left(\frac{v\,{}^tv}{{}^tv\,v}\right)^2 = \frac{v\,\overbrace{{}^tv\,v}\,{}^tv}{({}^tv\,v)^2} = \frac{{}^tv\,v}{({}^tv\,v)^2}\,v\,{}^tv = \frac{v\,{}^tv}{{}^tv\,v}$

Ainsi ${}^tH_v \cdot H_v = I$.

$\square$

LEMME 2

Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $H_v \cdot u = \|u\|_2 e_1$.

Démonstration

Posons $v = u - \|u\|_2 e_1$ et vérifions ! Si $v = 0$, c'est bon.

Sinon

$$\underbrace{{}^tv \cdot v}_{\in \mathbb{R}} = {}^t(u - \|u\| e_1)(u - \|u\| e_1) = 2(\|u\|^2 - \|u\| u_1)$$

De plus

$$(v \cdot {}^tv)u = (u - \|u\| e_1)\underbrace{({}^tu - \|u\|\,{}^te_1)u}_{\|u\|^2 - \|u\| u_1 \ \in \mathbb{R}}$$

d'où

$$\frac{v \cdot {}^tv}{{}^tv \cdot v}u = \frac{1}{2}(u - \|u\| e_1)$$

On en déduit

$$H_v \cdot u = \left(I - 2\frac{v \cdot {}^tv}{{}^tv \cdot v}\right)u = u - (u - \|u\| e_1) = \|u\| e_1$$

$\square$

On en déduit une démonstration de l'existence d'une décomposition QR.

Démonstration

Soit $C_1 \in \mathbb{R}^n$ le premier vecteur colonne de A. Il existe $u_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$H_{u_1} A = \left(\begin{array}{c|ccc} \|C_1\| & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$
d'après le lemme 2.

Notons $H_1 = H_{u_1}$. $\qquad A_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

On répète l'opération avec A_2 : soit $C_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ la première colonne de A_2. Il existe $u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que
$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & H_{u_2} & \\ 0 & & & \end{array}\right)}_{H_2} H_1 \; A = \left(\begin{array}{cc|c} \|C_1\| & * & * \\ 0 & \|C_2\| & \\ \hline \vdots & \vdots & A_3 \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

On itère alors l'opération jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure :
$$H_{n-1} \cdots H_2 \, H_1 \, A = \begin{pmatrix} \|C_1\| & & * \\ & \|C_2\| & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \|C_n\| \end{pmatrix} = R$$

avec $$H_i = \left(\begin{array}{c|c} I_{i-1} & 0 \\ \hline 0 & H_{u_i} \end{array}\right)$$

Remarquons que H_i est orthogonale car H_{u_i} l'est. En particulier
$$A = \underbrace{H_1 \, H_2 \cdots H_{n-1}}_{Q} R$$

et Q est orthogonale comme produit de matrices orthogonales.

$\square$

REMARQUES

① La matrice R ainsi construite a tous ses coefficients diagonaux strictement positifs

② On peut aussi donner une décomposition QR d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ non inversible (on ne s'est pas servi de l'inversibilité dans la démonstration). Dans ce cas, les coefficients diagonaux de la matrice R construite sont juste positifs ou nuls.

③ En imposant que les coefficients diagonaux de R soient strictement positifs quand $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a même unicité dans la décomposition QR.

En effet supposons alors $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$. Alors

$$ {}^tQ_2 Q_1 = R_2 R_1^{-1} $$

Notons $B = {}^tQ_1 Q_2$. Alors B est triangulaire inférieure et

$$ B\,{}^tB = {}^tQ_1 \underbrace{Q_2\,{}^tQ_2}_{I_n} Q_1 = {}^tQ_1 Q_1 = I_n $$

donc $B\,{}^tB$ est une factorisation de Cholesky de I_n (les coefficients diagonaux de B sont bien positifs car ceux de R_1 et R_2 le sont).

On en déduit $B = I_n$ donc $\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ R_1 = R_2 \end{cases}$

CONNAISSANCES

* problème des moindres carrés
* droite de regression des moindres carrés (mais pas la forme exacte de a et b)
* matrices de Householder.

COMPÉTENCES

* résoudre un problème des moindres carrés