Université de Rennes

Algèbre 1

Feuille d'exercices n°1

Espaces vectoriels de dimension finie

Préparation

1) Quand et comment introduit-on les vecteurs au lycée ?

2) Rappeler les définitions d'un ***espace-vectoriel*** et d'un ***sous-espace vectoriel***. Donner des exemples.

3) Qu'appelle-t-on ***sous-espace vectoriel engendré*** par une partie ?
Comment définit-on la somme de deux s.e.v. ? Quand dit-on que deux sous-espaces sont en ***somme directe*** ? Qu'ils sont ***supplémentaires*** ?

4) Qu'est-ce qu'une ***famille libre*** ? Une ***famille génératrice*** ? Une ***base*** ? Donner des exemples.
Comment caractérise-t-on le fait que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ?

5) Quand dit-on qu'un espace vectoriel est de ***dimension finie*** ? Qu'est-ce que le ***rang*** d'une famille de vecteurs ? Rappeler le théorème de la base incomplète.

6) Pourquoi travailler cette notion en Master MEEF ?

Exercice n°1

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.
$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + 2y + t = 0\}$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - t + 2z = 1\}$, $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ xy = 0\}$.

Exercice n°2

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les vecteurs $a_1 = (1, 2, 3)$ et $a_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $b_1 = (1, 0, 1)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$:

1) en écrivant b_1 et b_2 comme combinaisons linéaires de a_1 et de a_2.

2) en donnant une équation qui caractérise le sous-espace vectoriel engendré par a_1 et a_2.

Exercice n°3

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$v_1 = (1, 0, 1, 2) \quad v_2 = (2, 3, 1, -1) \quad v_3 = (1, 1, -1, 0) \quad v_4 = (0, 1, 2, 3) \quad v_5 = (2, 1, 0, 2)$

1. La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est-elle libre ?
2. Montrer que v_5 appartient à $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
3. Est-ce que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice n°4

Vérifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donner une base pour chacun d'eux :
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x + 2y + 2z = 0\}$, $\quad E_2 = \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda + \mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$,
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|y + z = 0 \text{ et } x = 0\}$, $\quad E_4 = \{(u, 2u, u) | u \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n°5

Soient $a = (1, -1, 1)$, $b = (0, -1, 2)$ et $c = (1, -2, 3)$ trois éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (a, b, c) est un système lié.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (a, b, c). Donner une base de F.
3. Soit $G = \{(x, y, z) | x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
4. Montrer que $F = G$.

Exercice n°6

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que le sous-ensemble $\mathbb{R}_3[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Quelle est sa dimension ?
3. La famille $\{X+1, 2X-1, 1+2X+X^2+X^3, X^2-X^3\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice n°7

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, montrer que $(\exp, x \mapsto xe^x, x \mapsto \ln x)$ est une famille libre. Est-elle génératrice de E ?

Exercice n°8

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Exercice n°9

E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E.
Dire (démonstration à l'appui) si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux (faire des dessins).

1) Le complémentaire d'un hyperplan est une droite.

2) Si $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$ alors $\dim(F+G+H) = \dim F + \dim G + \dim H$.

3) Si H et K sont deux hyperplans de E alors $H \cup K \neq E$.

4) Si P_1 et P_2 sont deux plans de E, vérifiant $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ alors $\dim E \geq 4$.

Exercice n°10 *(CAPES 1998)*

Soient ABC un triangle non aplati et M un point du plan affine. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

Exercice n°11 *(Épreuve sur dossier 2016)*

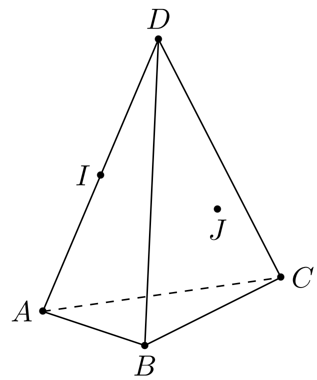
Dans un tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont respectivement les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$.
Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$. Démontrer que I, E, F et K sont coplanaires.

Exercice n°12 *(Épreuve sur dossier 2016)*

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(0;-3;1)$ et $D(-1;0;2)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Exercice n°13 *(Épreuve sur dossier 2018)*

$ABCD$ est un tétraèdre.
I est le milieu du segment $[AD]$.
J est le point de la face BCD défini par : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.



1) On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).

2) Sans utiliser de repère, donner une construction du point K.

Exercice n°14 *(CAPES 2019 - Première composition)*

1) Donner sans justification une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2) Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En donner une base.

Applications linéaires

Préparation

1) Rappeler la définition d'une ***application linéaire*** entre deux espaces vectoriels E et F. Qu'est-ce qu'un ***endomorphisme*** ?

2) Rappeler les définitions des exemples géométriques classiques (homothéties, projections, symétries) et les illustrer graphiquement. Donner d'autres exemples.

3) Rappeler les définitions du ***noyau*** $\ker f$ et de l'***image*** $\operatorname{Im} f$ d'un endomorphisme f.
Énoncer le théorème du rang.

4) Qu'appelle-t-on ***valeur propre*** et ***sous-espace propre*** associé d'un endomorphisme ? Donner des exemples.

5) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$. Rappeler la définition de la ***matrice*** de l'application linéaire $f : E \to F$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Quels sont les effets de changements de bases ?

Exercice n°15

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 - 2x_2 - 3x_3, x_1 - 2x_2 - 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. A-t-on $\operatorname{Im} f \subset \ker f$? $\ker f \subset \operatorname{Im} f$?

Exercice n°16

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ constitué des vecteurs $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$x + 2y - 3z + t = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z - 2t = 0.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F. Compléter la famille $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice n°17

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z, t) = (y - z + t, x - 2y + z - 2t, -2x + y + z + t).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f et l'image de f.
3. Déterminer des équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$.

Exercice n°18

1. Démontrer qu'il est impossible de trouver une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant $\ker f = \operatorname{Im} f$.
2. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Exercice n°19

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. On note $\mathcal{E}(a,b,c)$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

1) Montrer que $\mathcal{E}(a,b,c)$ est un espace vectoriel.

2) Montrer pour tout x et tout y de $\mathbb{C}$, il existe un unique élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}(a,b,c)$ tel que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. On note $F(x,y)$ cet élément.

3) Montrer que que l'application $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathcal{E}(a,b,c)$, $(x,y) \longmapsto F(x,y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathcal{E}(a,b,c)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(a,b,c)$.

4) Soit $r \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{E}(a,b,c)$ si et seulement si r est solution de *l'équation caractéristique* (C) : $ax^2 + bx + c = 0$.

a) On suppose que l'équation (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$. Montrer que les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathcal{E}(a,b,c)$.

b) On suppose que l'équation (C) admet une racine double r non nulle. Montrer que les deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathcal{E}(a,b,c)$.

5) On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Pour tout entier naturel n, expliciter u_n en fonction de n.

Exercice n°20 *(CAPES 2016 - Première composition)*

Pour tout naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq k}} \frac{X-a_i}{a_k-a_i}.$$

On considère l'application $F : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto (P(a_1), \cdots, P(a_n)). \end{cases}$

1) Montrer que F est une application linéaire.

2) Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3) Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

Exercice n°21

Soient E un espace vectoriel de dimension 4, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E, F un espace vectoriel de dimension 5, $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ une base de F.
Construire, lorsque cela est possible, une application linéaire u de E dans F qui vérifie la condition :

1) $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(f_1, f_2, f_3)$

2) $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(f_4)$

3) $\operatorname{Im} u = F$

4) $\ker u = \operatorname{vect}(e_3)$

5) $\ker u = \operatorname{vect}(e_1, e_3)$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(f_1, f_2)$

6) $\ker u = \operatorname{vect}(e_3, e_4)$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(f_1, f_2, f_3)$

Exercice n°22

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré au plus n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Soit $\Phi : E \longrightarrow E$, $P \longmapsto \Phi(P)$ où $\Phi(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{P(x)+P(-x)}{2}$.

1) Vérifier que Φ est linéaire.

2) Déterminer $\ker \Phi$ et $\operatorname{Im} \Phi$. Calculer leurs dimensions respectives et en donner des bases. Montrer que $E = \ker \Phi \oplus \operatorname{Im} \Phi$.

Exercice n°23 *(CAPES 2020 - Première composition)*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit le polynôme $\phi(P)$ par :

$$\phi(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X).$$

1) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré au plus n.

2) On appelle k-ième polynôme de Berstein de degré n le polynôme

$$B_{n,k}(X) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k(1-X)^{n-k}.$$

Démontrer que pour tout entier k entre 0 et n, on a

$$\phi(B_{n,k}(X)) = kB_{n,k}(X).$$

3) En déduire que $(B_{n,0}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que ϕ est diagonalisable.

4) Démontrer que ϕ n'est pas bijectif.

Exercice n°24

Soient E un espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.

1) Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée.

2) On suppose que $f^3 = 0$. f est-elle injective ? surjective ?

3) On suppose que $f^3 + 2f^2 - Id = 0$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse.

Exercice n°25

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\ker \Delta$.

2) Donner la dimension de $\operatorname{Im} \Delta$. Que dire de la famile $\left(\Delta(X^k)\right)_{1 \leq k \leq n}$? En déduire $\operatorname{Im} \Delta$ et montrer que pour tout entier $0 \leq k \leq n-1$, $X^k \in \operatorname{Im} \Delta$.

3) En déduire que pour ces entiers k, il existe un polynôme P_k, dont on peut suposer le terme constant égal à zéro, tel que $X^k = P_k(X+1) - P_k(X)$.

4) Calculer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=1}^{N} j^3$.

Exercice n°26

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = f(-x)$$

Déterminer les valeurs propres de u et montrer que E est somme directe des sous-espaces propres associés.

Exercice n°27

On appelle projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.
Montrer que si p est un projecteur de E alors $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p = \ker(id_E - p)$.