DÉCOMPOSITION LU

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On souhaite résoudre le système linéaire

$$AX = B$$

de manière effective et ... efficace !

- Par exemple, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ on peut calculer A^{-1}, d'où l'unique solution $X = A^{-1}B$. Mais calculer A^{-1} revient à résoudre $\boxed{n}$ systèmes linéaires $\begin{cases} AX_1 = e_1 \\ \vdots \\ AX_n = e_n \end{cases}$,
!!!
les solutions X_i vérifiant $P^{-1} = (X_1 | \cdots | X_n)$.

- Cas particulièrement simple : si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est triangulaire
Par exemple supérieure : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ici

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots = b_1 \\ \ddots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \cdots) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}}(b_{n-1} - \cdots) \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n \end{cases}$$

On "remonte" les solutions de x_n à x_1.

- But de la décomposition LU des matrices : "triangulariser" le système $AX = B$ pour le rendre plus facile à étudier.
Mais pas triangulariser A car calcul de P, P^{-1} ...

I MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

La méthode est la suivante. Pour résoudre $AX=B$, on va :

* trouver $M \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que MA est triangulaire supérieure
* calculer $MB \in M_{n,1}(\mathbb{K})$
* résoudre $MAX = MB$

En effet * M est inversible, donc résoudre $AX=B$ est équivalent à résoudre $MAX=MB$

* MA est triangulaire, donc le nouveau système est plus facile à résoudre.

EXEMPLE : Résoudre $\begin{cases} 5x+2y+z=12 \\ 5x-6y+2z=-1 \\ -4x+2y+z=3 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Par la méthode du pivot de gauss, ce système est équivalent à

$$\begin{array}{l} \\ L_2-L_1 \\ L_3+\frac{4}{5}L_1 \end{array} \begin{cases} 5x+2y+z=12 \\ -8y+z=-13 \\ \frac{18}{5}y+\frac{9}{5}z=\frac{63}{5} \end{cases} \quad A_2=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \quad B_2=\begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{63}{5} \end{pmatrix}$$

puis à

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3+\frac{1}{8}\times\frac{18}{5}L_2 \end{array} \begin{cases} 5x+2y+z=12 \\ -8y+z=-13 \\ \frac{9}{4}z=\frac{27}{4} \end{cases} \quad A_3=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} \quad B_3=\begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

dont la solution est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

REMARQUE

Parfois, il faut aussi échanger des lignes pour arriver à une forme triangulaire.

Par exemple pour $A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne peut être un pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 - L_2}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}}$$

On va réaliser les opérations sur les lignes d'une matrice par des multiplications matricielles

DÉFINITION

Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ avec $i < j$. On appelle matrice de transposition des lignes (i, j) la matrice $T_{(i,j)}$ construite à partir de l'identité I_n en échangeant les lignes i et j.

Par exemple $T(2,4) \in M_4(\mathbb{K})$ est $T(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

LEMME

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i < j$. Alors $T(i,j)\, A$ est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes i et j

Démonstration : faire le calcul ! □

REMARQUE

$$\det T(i,j) = -1$$

DÉFINITION

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et soit $(\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n-i}$. On appelle matrice d'élimination une matrice de la forme

$$E_i(\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & \alpha_{i+1} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & \alpha_n & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Notez que $\det E_i(\dots) = 1$

LEMME

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $E_i(\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ une matrice d'élimination. Alors $E_i(\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)A$ est la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à ses lignes L_{i+j}, pour $j > 0$, la ligne $\alpha_{i+j} L_i$.

Démonstration : faire le calcul !

REMARQUE

Les matrices de transposition et d'élimination sont inversibles. Plus précisément

$$\begin{cases} T(i,j)^{-1} = T(i,j) \\ E_i(\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = E_i(-\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_n) \end{cases}$$

THÉORÈME (Pivot de Gauss)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrices de transposition et d'élimination, telle que MA soit une matrice triangulaire supérieure.

<u>Démonstration :</u> par récurrence sur n.

H_n : pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe $M \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrice de transposition et d'élimination telle que MA est triangulaire supérieure

Initialisation : pour $n = 1$, le résultat est immédiat !

Hérédité : supposons H_{n-1}, et montrons H_n. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

sinon on passe à l'étape suivante

. Supposons que la première colonne de A est non nulle. Si $a_{11} = 0$, on multiplie A à gauche par $T(1,j)$ où j est choisi tel que $a_{j1} \neq 0$. Alors le coefficient $(T(1,j)A)_{11}$ est non nul. Posons alors $A' = T(1,j)A$ (et $A' = A$ si $a_{11} \neq 0$).

. On élimine alors les autres coefficients de A' sur la première colonne avec la matrice d'élimination adéquate :

$$E = E_1\left(-\frac{a_{21}}{a'_{11}}, \dots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)$$

de sorte que $EA' = \left(\begin{array}{c|c} a'_{11} & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$, $B \in M_{n-1}(\mathbb{K})$.

. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à B, il existe $N \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$, produit de matrices de transposition T et d'élimination E, telle que NB est triangulaire supérieure.

. Chacune de ces matrices T, E reste une matrice de la même forme en l'agrandissant en faisant l'opération

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \text{ ou } E \\ 0 & \end{array}\right)$$

d'où une nouvelle matrice $N' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) \in GL_n(\mathbb{K})$

- Le calcul du produit par blocs donne alors que la matrice $N'A'$ est triangulaire supérieure, d'où H_n est démontré.

Le théorème est donc démontré par récurrence. $\square$

REMARQUE (rappel de L1)

En poursuivant le calcul via la méthode du pivot de Gauss, on peut calculer l'inverse d'une matrice.

Par exemple pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$, cela revient à passer de $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

En termes de système linéaire :

$$\begin{cases} x - z = a \\ x - y = b \\ x - y + z = c \end{cases} \iff \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x - z = a \\ -y + z = b - a \\ -y + 2z = c - a \end{cases}$$

$$\underset{L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x - z = a \\ -y + z = -a + b \\ z = -b + c \end{cases} \underset{\text{« on remonte »}}{\iff} \begin{cases} x = a - b + c \\ y = a - 2b + c \\ z = -b + c \end{cases}$$

d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

II LA DÉCOMPOSITION LU

Lower ($\triangle$) — Upper (∇)

Reprenons la méthode du pivot de Gauss et imaginons qu'à chaque étape i le terme (i,i) de la matrice (candidat à être le i-ème pivot) est non nul :

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \underset{\neq 0}{a_{11}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & \underset{\neq 0}{a'_{22}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & & a'_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \underset{\neq 0}{a''_{ii}} & \vdots \\ 0 & & 0 & a''_{ni} & \cdots \; a''_{nn} \end{pmatrix}$$

On n'a donc pas besoin d'échanger de lignes, donc d'utiliser les matrices de transposition $T(i,j)$. Ainsi

$$M = E_{n-1} \cdot E_{n-2} \cdot \cdots \cdot E_1$$

est produit de matrices d'élimination, donc M est triangulaire inférieure. Ainsi :

* $MA = U$ est triangulaire supérieure
* $L = M^{-1}$ est triangulaire inférieure
* $A = LU$

REMARQUES

- A sera forcément inversible
- les coefficients diagonaux de L sont égaux à 1

Le résultat suivant donne une condition pour que la discussion précédente s'applique.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_i} & \\ & \end{pmatrix}$$ $\det A_i$ est un mineur principal

THÉORÈME

Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telle que tous ses mineurs principaux soient non nuls. Alors il existe $(L, U) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})^2$ tel que

- L est triangulaire inférieure à coefficient diagonaux 1
- U est triangulaire supérieure
- $A = LU$

De plus, une telle factorisation de A est unique.

EXEMPLE (du début du I)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour rendre A triangulaire, on avait fait les opérations élémentaires suivantes :

- première étape : ligne 2 → ligne 2 − ligne 1
  ligne 3 → ligne 3 + $\frac{4}{5}$ ligne 1

$\rightsquigarrow E_1(-1, +\frac{4}{5}) A$

- seconde étape : ligne 3 → ligne 3 + $\frac{9}{20}$ ligne 2

$$\rightsquigarrow E_2\left(+\tfrac{9}{20}\right) E_1\left(-1, +\tfrac{4}{5}\right) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = U$$

Alors $L = \left(E_2\left(+\frac{9}{20}\right) E_1\left(-1, +\frac{4}{5}\right)\right)^{-1}$

$$= E_1\left(+1, -\tfrac{4}{5}\right) E_2\left(-\tfrac{9}{20}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}}$$

Application à la résolution de $AX = B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$AX = B \iff LUX = B$$
$$\iff \underbrace{UX}_{\text{il est triangulaire, la résolution est facile}} = L^{-1}B = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

Démonstration du théorème : EXISTENCE

- a_{11} est le premier mineur principal, donc $a_{11} \neq 0$. La première étape du pivot de Gauss est donc l'élimination :

$$E_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & - - - & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & a'_{n2} & - - a'_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Étudions ce produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} \overset{M_1 \,(2\times 2)}{\boxed{\begin{matrix} 1 & \\ * & 1 \end{matrix}}} & \overset{M_2 \,(\text{de taille } 2\times(n-2))}{\boxed{\quad 0 \quad}} \\ \vdots & \ddots \\ * \quad 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & \cdots \\ \underbrace{\boxed{\vdots}}_{N_2 \,(n-2)\times 2} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ 0 & a'_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ainsi $M_1 A_2 + M_2 N_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$. Or $M_2 = 0 \in M_{2,(n-2)}(\mathbb{K})$

d'où $M_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$. En passant au déterminant :

$\det M_1 \cdot \det A_2 = 1 \cdot \det A_2 \neq 0$ par hypothèse donc $a_{11} a'_{22} \neq 0$

et donc $a'_{22} \neq 0$.

• On peut donc effectuer la deuxième étape de l'algorithme de Gauss sans échanger de lignes.

• Continuons ainsi jusqu'à la situation

$$E_i \cdots E_1 A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & & & & * \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_i & \\ 0 & & & & a_{i+1} \end{matrix} & \\ 0 & \begin{matrix} * & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix}$$

avec $E_i \cdots E_1 = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad}^{i+1} \qquad\qquad \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right) \end{array}$. Effectuant le produit par blocs comme précédemment, et en prenant le déterminant on obtient

$$1 \times \det A_{i+1} = a_1 a_2 \cdots a_{i+1}$$

et donc $a_{i+1} \neq 0$ car $\det A_{i+1} \neq 0$.

• On peut donc choisir a_{i+1} comme pivot pour l'étape suivante.

• On répète ces opérations au plus $n-1$ fois pour arriver au résultat.

UNICITÉ : Supposons $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ avec L_i et U_i comme dans l'énoncé. Alors

$$L_2^{-1} L_1 U_1 U_1^{-1} = L_2^{-1} L_2 U_2 U_1^{-1}$$

d'où $$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$$

Or $L_2^{-1} L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 U_1^{-1} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

d'où $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I_n$ nécessairement.

Par conséquent $L_2 = L_1$ et $U_2 = U_1$.

REMARQUE

• Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible, une décomposition LU peut parfois exister, mais elle ne sera plus unique.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

APPLICATIONS

① Résoudre $AX = B$. Si $A = LU$, la résolution revient à résoudre deux systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$$

En effet on a alors
$AX = LUX = LY = B$

② Calculer l'inverse de A : $A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$ et les calculs de U^{-1} et L^{-1} sont plus faciles

③ Calculer le déterminant de A : c'est celui de U !

ASTUCE

La matrice L se calcule facilement à partir des matrices d'élimination ... mais pas L^{-1} !!!

Sur l'exemple :

$$E_2 \, E_1 \, A = U$$

soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$$

et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$

On a rentré E_1 et E_2 dans une même matrice en changeant les signes des coefficients sous la diagonale.

Par contre $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7/20 & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$

!!!

REMARQUE

La décomposition LU existe quand dans l'algorithme du pivot de Gauss, on n'échange pas de lignes.

Cependant, quitte à permuter des lignes de A a priori, on peut montrer qu'on peut toujours trouver une telle décomposition (même si A n'est pas inversible).

THÉORÈME (décomposition PLU)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ matrice de permutation, $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que

$$A = PLU$$

- les coefficients sont 0 ou 1
- un seul 1 par ligne et par colonne

REMARQUE

Il n'y a plus unicité de la décomposition. Par exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{échange des deux lignes}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

III LA FACTORISATION DE CHOLESKY

Une matrice symétrique définie positive vérifie les conditions d'application de la décomposition LU.

LEMME

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors les mineurs principaux de A sont strictement positifs.

REMARQUE

En particulier
* det A est strictement positif
* a_{11} aussi !

On peut montrer de même que tous les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs. (cf TD4 ex. 1.3)

Démonstration

. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et A_i la matrice de taille $i \times i$ composée des i premières lignes et colonnes de A.

Soit $X \in \mathbb{R}^i \setminus \{0\}$. On ajoute des zéros à X pour en faire un vecteur X' de $\mathbb{R}^n$:
$$X' = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Alors ${}^tX' A X' = {}^tX A_i X$

- Or A est définie positive donc ${}^tX' A X' > 0$ car $X' \neq 0$.
  On en déduit que $A_i \in S_i(\mathbb{R})$ est aussi définie positive.
- Il reste à vérifier qu'une matrice symétrique définie positive a un déterminant strictement positif.

Or une telle matrice est diagonalisable, et son déterminant est donc le produit des valeurs propres.

□

COROLLAIRE

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ admet une décomposition LU. De plus tous les coefficients diagonaux de U sont strictement positifs.

Démonstration

- Le lemme donne l'existence de la décomposition. Ainsi

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- De plus

$$\det A_i = \prod_{j=1}^{i} u_{jj}$$

(où $A_i \in \mathcal{M}_{i,i}(\mathbb{R})$ contient les i premières lignes et colonnes de A)

par un calcul de produit par blocs.

- On en déduit la positivité de $u_{11}, \dots, u_{nn}$ de proche en proche.

□

Mais on peut produire une décomposition encore plus simple avec une seule matrice au lieu de deux. C'est la factorisation de Cholesky.

THÉORÈME (factorisation de Cholesky)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que

$$A = B\,{}^tB$$

REMARQUE

La condition est en fait nécessaire et suffisante. En
c'est le théorème
effet $B\,{}^tB$ est symétrique, et si $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$${}^tX B\,{}^tB X = \|{}^tBX\|_2^2 > 0$$

car ${}^tB$, comme B, est inversible (elle est triangulaire à coefficients diagonaux strictements positifs).

Démonstration EXISTENCE.

Écrivons $A = LU$, avec $u_{11} > 0, \dots, u_{nn} > 0$.

Notons $D = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$. Alors

$$A = LU = LDD^{-1}U = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$$

Posons $B = LD$ et $C = D^{-1}U$.

On va vérifier que $C = {}^tB$.

Or A est symétrique donc $A = BC = {}^t(BC) = {}^tC\,{}^tB = {}^tA$

ou encore
$$B^{-1}BC\,{}^tB^{-1} = B^{-1}\,{}^tC\,{}^tB\,{}^tB^{-1}$$
$$C\,{}^tB^{-1} = B^{-1}\,{}^tC$$
ce qui s'écrit
$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$$
On en déduit que ces deux matrices sont égales à I_n,

d'où $C = {}^tB$.

UNICITÉ

Supposons $A = B_1\,{}^tB_1 = B_2\,{}^tB_2$ avec B_1 et B_2 triangulaires inférieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

Posons D_i la matrice diagonale extraite de B_i, de sorte que
$$A = \underbrace{(B_i D_i^{-1})}_{L_i}\underbrace{(D_i\,{}^tB_i)}_{U_i}$$
est la décomposition LU de la matrice A. Par unicité on obtient
$$B_1 D_1^{-1} = B_2 D_2^{-1} \quad \text{et} \quad \boxed{D_1\,{}^tB_1 = D_2\,{}^tB_2} \;(*)$$
Les coefficients diagonaux de $(*)$ donnent :
$$(B_1)_{ii}^2 = (B_2)_{ii}^2$$
ou encore $D_1^2 = D_2^2$. Or les coefficients de D_1 et D_2 sont positifs donc $D_1 = D_2$. On en déduit $B_1 = B_2$

$\square$

EXEMPLE

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & 19 \end{pmatrix}$ est définie positive.

On a $A = B\,{}^tB$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour résoudre $AX = b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -22 \end{pmatrix}$, i.e. $B\,{}^tBX = b$

on procède ainsi :

$$\begin{cases} Y = {}^tL\,X \\ LY = b \end{cases}$$ Deux systèmes triangulaires

On obtient $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ d'où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Par rapport à la décomposition LU, la factorisation de Cholesky est moins coûteuse (une seule matrice).

CONNAISSANCES :

* méthode du pivot de Gauss
* propriétés des matrices de transposition et d'élimination
* décomposition LU, PLU, de Cholesky

COMPÉTENCES

* calcul de ces décompositions
- application à la résolution de système, calcul d'inverse, de déterminant.