FEUILLE D'EXERCICES 4
MASTER 2, 2008
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE

Exercice 0.1. Soit $F_t(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y,t\}$ défini par $F_t(x,y) = x^4 + y^5 + tx^2y^3$.

(1) Montrer que $F_t(x,y)$ est équivalent à $F_1(x,y)$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^4 = 1, b^5 = 1$ et $a^2b^3 = t$.
(2) Montrer que pour $t \neq 0$ les algèbres de Milnor de F_t sont toutes isomorphes.

Exercice 0.2. Soit $f \in\subset \mathbb{C}\{x,y\}$ défini par $f(x,y) = x^3 + xy^3 + h(x,y)$ avec $h \in (y^6, xy^4, x^2y^3, x^3y^2, x^4)$. Montrer que f est équivalent à $x^3 + xy^3$.

Exercice 0.3. Soit $f \in\subset \mathbb{C}\{x,y\}$ défini par $f(x,y) = x^3 + xy^3$.

(1) Montrer que f est déterminé à l'ordre 5.
(2) Soit $g \in\subset \mathbb{C}\{x,y\}$ de la forme $g(x,y) = x^3 + xy^3 + ay^5 + xh(x,y)$ avec $h \in m^4$. Montrer qu'après changement de variables on peut supposer g de la forme $g(x,y) = x^3 + xy^3 - 3ax^3y + H(x,y)$ avec $H \in (xy^4, x^2y^3, x^3y^2, x^4) \subset m^2J$. En déduire que f est déterminé à l'ordre 4.

Exercice 0.4. Soit $f \in\subset \mathbb{C}\{x,y\}$ de nombre de Milnor fini. On suppose que le jet d'ordre 3 de f est $j_3f = x^3$.

(1) Montrer que j_4f est équivalent à $x^3 + ay^4 + bxy^3$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$.
(2) On suppose $a \neq 0$. Montrer que j_4f est alors équivalent à une singularité E_6. En déduire que f est équivalent à une singularité E_6.
(3) On suppose $a = 0$ et $b \neq 0$. Montrer que f est équivalent à une singularité E_7.
(4) On suppose $a = b = 0$. Alors le jet d'ordre 5 de f est de la forme $x^3 + cy^5 + dxy^4 + x^2h$ avec $h \in m^3$. Montrer que f est équivalent à une singularité E_8 si $c \neq 0$, alors que $f \in (x, y^2)^3$ si $c = 0$.