FEUILLE D'EXERCICES 2
MASTER 2, 2008
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE

1. Théorèmes de Weierstrass

Exercice 1.1. Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ telles que $f_i(0) = 0$ et telles que $\det \frac{\delta f_i}{\delta y_j}(0) \neq 0$ pour $i, j = 1, \ldots, m$. Montrer qu'il existe $\phi_1, \ldots, \phi_m \in C\{x_1, \ldots, x_n\}$, uniquement déterminées par $f_1, \ldots, f_m$, telles que $\phi_i(0) = 0$ et $f_i(x_1, \ldots, x_n, \phi_1, \ldots, \phi_m) = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Exercice 1.2. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ telles que $f_i(0) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer que $\det \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(0) \neq 0$ pour $i, j = 1, \ldots, n$ si et seulement s'il existe des voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{C}^n$ telles que $(f_1, \ldots, f_n)$ définissent une bijection holomorphe de U sur V d'inverse holomorphe.

Exercice 1.3. Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n, y]]$ régulière d'ordre 1 par rapport à y. En particulier $f = yu(x, y) + v(x)$ avec u inversible et $v(0) = 0$.

(1) Soit $g \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n, y]]$. Montrer qu'on peut construire une suite de séries $g_i, q_i \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n, y]]$ et $r_i \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ telles que $g = q_i f + r_i + g_i$ et $g_i, q_{i+1} - q_i, r_{i+1} - r_i \in (x_1, \ldots, x_n)^i$.(indication: $q_0 = r_0 = 0, g_0 = g$, puis effectuer la division de g_i par $y = (f - v)/u$)
(2) En déduire la division de Weierstrass formelle de g par f.
(3) Si de plus $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n, y\}$, montrer qu'on obtient ainsi la division de Weierstrass de g par f.
(4) On suppose $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n, y\}$ de la forme $f \in (y) + (x_1, \ldots, x_n)^e$, et $\frac{\delta f}{\delta y}(0) \neq 0$. Alors la solution implicite $y = \phi(x)$ de l'équation $f(x, y) = 0$ au voisinage de 0 vérifie $\phi(x) \in (x_1, \ldots, x_n)^e$.

Exercice 1.4. Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ une série en deux variables et soit $\phi \in (x)\mathbb{C}[[x]]$ telle que $f(x, \phi) = 0$. On veut montrer que $\phi \in \mathbb{C}\{x\}$.

(1) Montrer qu'on peut se ramener à un polynôme distingué irréductible.
(2) On suppose désormais $\phi \notin \mathbb{C}\{x\}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ et $c \in \mathbb{C}\{x\}$ tels que $c \neq 0$ et $af + b\frac{\delta f}{\delta y} = c$.
(3) En déduire que $\frac{\delta f}{\delta y}(x, \phi) \neq 0$. Choisir $h \in \mathbb{C}\{x\}$ tel que $\operatorname{ord}(\phi - h) \geq 2 \operatorname{ord}(\frac{\delta f}{\delta y}(x, \phi)) + 1$.
(4) Montrer qu'il existe $\psi \in \mathbb{C}\{x\}$ tel que $f(x, \psi) = 0$ et $\phi - \psi \in (x)\frac{\delta f}{\delta y}(x, h)$.
(5) En déduire que f est réductible.

Exercice 1.5. Soit $f = y^p + a_1(x)y^{p-1} + \cdots + a_p(x)$ avec $a_i \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$. On suppose que $a_1, \ldots, a_p$ convergent sur U et qu'en $x_o \in U$ le polynôme $f(x_0, y)$ admet p racines distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset U$ et des fonctions analytiques $r_1, \ldots, r_p$ sur V tels que

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^{p}(y - r_i(x))$$

sur $V \times \mathbb{C}$.