FEUILLE D'EXERCICES 1
MASTER 2, 2008
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE

Les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

1. Algèbre

Exercice 1.1. Le radical $\sqrt{I}$ d'un idéal $I \subset A$ d'un anneau A est défini par

$$\sqrt{I} = \{a \in A : a^n \in I \text{ pour un certain n}\}.$$

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal. De plus $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$ et $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

Exercice 1.2. Soient $I, J \subset A$ des idéaux de l'anneau A. On définit $I : J$ par

$$I : J = \{a \in A : aJ \subset I\}.$$

(1) Montrer que $I : J$ est un idéal contenant I.
(2) Pour $a \in A$ montrer que $(I \cap J) : a = (I : a) \cap (J : a)$.
(3) Si $a \in A$ est tel que $I : a = I : a^2$, alors $(I : a) \cap (I, a) = I$.

Exercice 1.3. Un idéal $I \subset A$ d'un anneau A est dit primaire si $ab \in A$ et $a \notin A$ impliquent $b^n \in A$ pour un certain entier n.

(1) Montrer que si I est primaire alors $\sqrt{I}$ est premier ou égal à A.
(2) Montrer que si $\sqrt{I}$ est maximal alors I est primaire.

Exercice 1.4. (Décomposition primaire) Soit A un anneau noethérien et I un idéal. Montrer qu'il existe un nombre fini d'idéaux primaires $q_1, \ldots, q_r$ dans A tels que $I = q_1 \cap \cdots \cap q_r$. (indication: par l'absurde, considérer l'ensemble des idéaux n'admettant pas une décomposition primaire,...)

Exercice 1.5. Soit k un corps infini. Montrer que pour un polynôme $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ non nul, il existe une infinité de points $x \in k^n$ tels que $f(x) \neq 0$.

Exercice 1.6. Soit M un module de type fini sur un anneau local (A, m). Montrer que si $f_1, \ldots, f_r \in M$ engendrent $\frac{M}{mM}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\frac{A}{m}$, alors $f_1, \ldots, f_r$ engendrent M. (indication: lemme de Nakayama)

Exercice 1.7. Soit k un corps et A une algèbre locale sur k d'idéal maximal m.

(1) Montrer que si $\dim_k A = n$, alors $m^n = 0$.
(2) Si l'idéal $I \subset A$ satisfait à $\dim_k \frac{A}{I} = n$, alors $m^n \subset I$. (indication: lemme de Nakayama)