Université de Rennes 1 2021

Devoir de géométrie algébrique réelle

À rendre pour le 10 février

Exercice 1.

/4 (1) Soient S et T des ensembles semi-algébriques, et $h : S \to T$ un homéomorphisme semialgébrique (i.e une application semi-algébrique bijective et continue, d'inverse continue). Montrer que h^{-1} est aussi semi-algébrique.

/4 (2) Soit A un ensemble semi-algébrique localement fermé. Montrer que A est semi-algébriquement homéomorphe à un fermé semi-algébrique.

(1) Vérifier que $\begin{array}{rcl} T \times S & \longrightarrow & S \times T \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$ est une application semi-algébrique (car restriction d'une application polynomiale par exemple)

(2) Une application continue bijective n'est pas forcément un homéomorphisme...

Exercice 2.

/3 (1) Définir le corps des séries de Puiseux à coefficients réels.

/2 (2) Montrer qu'il existe un ordre sur ce corps.

/2 (3) Montrer que tout élément positif pour cet ordre est un carré.

/2 (4) Montrer qu'il existe un unique ordre sur le corps des séries de Puiseux à coefficients réels.

/3 (5) Donner une factorisation de $P = y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - x^7$ dans les séries de Puiseux.

(1) Donner la définition de l'addition, la multiplication, et vérifier l'existence d'un inverse.

(2) On construit un ordre "à la main", ou on vérifie que -1 n'est pas une somme de carrés.

(3) Penser à justifier (selon la méthode utilisée) la composition de séries formelles

(4) Le cône positif P_+ pour l'ordre du (3) est formé des carrés. Il vérifie $P_+ \cup -P_+ = \mathbb{R}((t^{\frac{1}{\infty}}))$.
Si P est le cône positif d'un ordre, $P_+ \subset P$ et si on n'a pas égalité il existe $a \in P \setminus P_+$, donc $-a$ est un carré d'où a est négatif pour le nouvel ordre : en contradiction avec $a \in P$.

(5) P est de degré deux en $Y = y^2$, d'où

$$P = \left(y^2 - \left(x^3 - x^{7/2}\right)\right)\left(y^2 - \left(x^3 + x^{7/2}\right)\right)$$

Il reste à prendre les racines de ces deux éléments positifs.

$$P = \left(y - \sqrt{x^3 - x^{7/2}}\right)\left(y + \sqrt{ — }\right)\left(y - \sqrt{x^3 + x^{7/2}}\right)\left(y + \sqrt{ — }\right).$$