Devoir de géométrie algébrique réelle

À rendre pour le 26 février

Exercice 1.

(1) Soit K un corps non réel, de caractéristique différente de 2. Montrer que tout élément de K est une somme de carrés.

(2) Soit K un corps réel de clôture réelle R. Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ qui est une somme de carrés de fractions rationnelles de $K(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in R^n$.

(3a) Montrer qu'il existe un unique ordre sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(t)$ qui étend l'ordre de $\mathbb{Q}$ et tel que $t > q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

(3b) On pose $K = \mathbb{Q}(t^2)$ avec l'ordre induit par l'inclusion $K \subset \mathbb{Q}(t)$. Soit $P \in K[X]$ défini par $P = (X^2 - t^2)(X^2 - 4t^2)$. Montrer que $P(a) > 0$ pour tout $a \in K$.

(3c) Montrer que P n'est pas une somme de carrés de fractions rationnelles de $R(X)$, où R est la clôture réelle de K.

Exercice 2.

Donner une démonstration d'un des résultats suivants :

(1) Lemme de sélection d'une courbe.

(2) Existence et unicité de la clôture réelle d'un corps ordonné.