1 Courbes paramétrées

1.1 Introduction : courbes dans le plan

1.1.1 Définition, exemples

On appelle courbe dans le plan une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Une telle courbe est définie par ses applications coordonnées dans le repère $((1,0),(0,1))$:

$$f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Si on change de repère l'écriture de la courbe change. Nous ne voulons pas étudier en détail la notion de courbes et leurs différentes représentations. Nous supposons donc qu'une courbe est donnée par ses coordonnées dans la base précédente.

Remarque : on appelle généralement courbe l'image de l'application plutôt que l'application elle-même.

1.1.2 Longueur de courbes

Supposons que les deux applications x et y soit C^1 et définie sur $[0,1]$. On appelle longueur de la courbe définie par x et y la quantité

$$l(\mathcal{C}) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

Lorsque les fonctions ne sont pas dérivables il n'est pas toujours possible de définir la longueur de la courbe. Elle peut très bien être infinie.

1.1.3 La courbe de Peano, la courbe de Koch

Peano a ainsi montré que l'on peut très bien voir le carré unité comme une courbe. Il existe une application continue surjective de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$. Mais il existe aussi des courbes de longueur infinie mais d'aire nulle. Les plus célèbre de ces courbes présentent des propriétés d'autosimilarité. Ce sont ce qu'on appelle des courbes fractales. Ce type de courbe a été longtemps considéré comme des objets étranges et peu naturels. Ce n'est plus le cas aujourd'hui. Les trajectoires de ce qu'on appelle le mouvement brownien, par exemple, sont des courbes sans tangente, de longueur infinie.

Les objets fractales font l'objet de nombreuses recherches.

Remarquons que si la courbe est C^1 alors elle est négligeable dans le plan. Autrement dit son aire est nulle ou encore pour tout $\epsilon > 0$ on peut la recouvrir par une réunion finie de petits disques dont la somme des aires est inférieure à ϵ. Montrons-le. Donnons-nous une fonction C^1

$$f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Comme les dérivées x' et y' sont continues sur le segment $[0,1]$ elles sont toutes les deux bornées. Soit M tel que $|x'(t)|$ et $|y'(t)|$ soient toutes deux inférieures à M pour tout t dans $[0,1]$. Le théorème des accroissements finis assure alors que pour tous $t, t' \in [0,1]$ on a

$$|x(t) - x(t')| \leq M|t - t'|, \quad |y(t) - y(t')| \leq M|t - t'|.$$

La distance entre l'image de t et celle de t' est donc inférieure à $\sqrt{2}M|t - t'|$.

Soit $\epsilon > 0$.

Prenons $k = E(\sqrt{2}M)/\epsilon + 1$ points sur $[0,1]$ espacés de moins de $\epsilon/\sqrt{2}M$: $t_0, ..., t_k$. Alors pour tout t dans $[0,1]$ le point $f(t)$ appartient à la réunion des disques de rayons $M.\epsilon/\sqrt{2}M = \epsilon/\sqrt{2}$ centrés en les points $f(t_i)$. Cette réunion a une aire inférieure à $k.\pi\epsilon^2/2 \leq (\sqrt{2}M/\epsilon + 1)\pi\epsilon^2/2 \leq \pi M \epsilon$.

L'exemple de la courbe de Peano montre que si f est supposée seulement continue ce résultat n'est plus vrai.

1.2 Courbes paramétrées

1.2.1 Définitions

Définition 1.1. *Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ s'appelle fonction vectorielle ou courbe paramétrée.*
On exprime $F(t)$ à l'aide des fonctions coordonnées $F(t) = (f_1(t)\,, \ldots\,, f_d(t))$.

Exemples

(1) Soit F la fonction définie par $F(t) = (x_0 + ta\,, y_0 + tb\,, z_0 + tc)$ avec $t \in \mathbb{R}$. La droite passant par (x_0, y_0, z_0) et dirigée par (a, b, c).

(2) Soit F la fonction définie par $F(t) = (R\cos t\,, R\sin t)$ avec $t \in [0, frm{-}e\pi]$. Un cercle.

(3) Soit F la fonction définie par $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Une hélice.

Définition 1.2. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.*

(1) $\lim\limits_{t \to p} F(t) = \left(\lim\limits_{t \to p} f_1(t)\,, \ldots\,, \lim\limits_{t \to p} f_d(t) \right)$

(2) $F'(t) = (f_1'(t)\,, \ldots\,, f_d'(t))$

(3) $\displaystyle\int_a^b F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\,, \ldots\,, \int_a^b f_d(t)\,dt \right)$

Théorème 1.3. *Si* F , $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ *et* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont dérivables alors :*

(i) $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$

(ii) $(uF)'(t) = u'(t)F(t) + u(t)F'(t)$

(iii) $(< F, G >)'(t) =< F'(t), G(t) > + < F(t), G'(t) >$

(iv) $(F \wedge G)'(t) = F'(t) \wedge G(t) + F(t) \wedge G'(t)$ *si* $d = 3$

(v) $F(u(t))' = u'(t)F'(u(t))$

Corollaire 1.4. *Si une courbe paramétrée* $F(t)$ *est dérivable et si* $\|F(t)\|$ *est constante alors* $< F(t), F'(t) >= 0$*. (Autrement dit, si la courbe* $F(t)$ *est sur une sphère centrée en 0, alors* $F(t)$ *et* $F'(t)$ *sont orthogonaux).*

Exemple

$F(t) = (\cos t\, , \sin t)$

Si $F(t) = (x_1(t)\, , \, \dots\, , \, x_n(t))$ est dérivable et $F'(t) \neq 0$, on voit que $F'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h}$.
Interprétation graphique du vecteur dérivée.

Définition 1.5. *Soit* C *la courbe tracée par* F*. Si* $F'(t_0) \neq 0$ *alors*
la droite passant par $F(t_0)$ *de vecteur directeur* $F'(t_0)$ *est appelée* **droite tangente** *à* C *en* $F(t_0)$*.*
$F'(t_0)$ *est un vecteur tangent à* C *en* $F(t_0)$*. Le point* $F(t_0)$ *est dit régulier.*

Lorsque $F'(t_0) = 0$, le point est dit stationnaire et il nécessite une étude plus poussée (via la formule de Taylor).

Nous voulons maintenant définir la longueur d'un arc de courbe régulière.

Le cas d'un segment.

Le cas du cercle.

Le cas des courbes planes. Soit F une fonction C^1 définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On cherche à approcher l'arc par une ligne brisée comportant de plus en plus de segments. Soit n un entier naturel. Pour i variant de 0 à n posons : $t_i = a + i(b - a)/n$, $x_i = F(t_i)$.

Calculons la longueur de la courbe brisée dont les sommets sont les points x_i. Grâce à la définition de la dérivée on a :

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= F(t_i + (b - a)/n) - F(t_i) \\ &= F'(t_i)(b - a)/n + \epsilon(1/n)/n \end{aligned}$$

où $\epsilon(1/n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que lLa longueur du segment $[x_i, x_{i+1}]$ est donc très proche de $\|F'(t_i)(b - a)/n\|$:

$$\Big|\ \|x_{i+1} - x_i\| - \|F'(t_i)(b - a)/n\|\ \Big| \leq \|\epsilon(1/n)\|/n.$$

On obtient donc une estimation de la longueur de la courbe brisée :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\|x_{i+1}-x_i\| - \sum_{i=0}^{n-1}\|F'(t_i)(b-a)/n\|| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}|\|x_{i+1}-x_i\| - \|F'(t_i)(b-a)/n\|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\|\epsilon(1/n)\|/n \\ &\leq \|\epsilon(1/n)\|.\end{aligned}$$

La différence entre la longueur de la courbe brisée et la somme $\sum_{i=0}^{n-1}\|F'(t_i)(b-a)/n\|$ tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini. Mais lorsque n tend vers l'infini la somme $\sum_{i=0}^{n-1}\|F'(t_i)(b-a)/n\|$ converge vers l'intégrale $\int_a^b \|F'(t)\|dt$. C'est donc cette quantité qu'on appelle longueur de l'arc de courbe défini par F.

Le cas général.

Définition 1.6. *La* **longueur de l'arc** *de la courbe $F(t)$ entre $t=a$ et $t=b$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b \|F'(t)\|\,dt$.*

Exemple
La longueur du graphe d'une fonction f de classe C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$ est donnée par

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée.
On suppose F de classe C^1 et que $F'(t)\neq 0$ pour tout t. On dit que F est **régulière**.
Alors :

(i) $l(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \|F'(u)\|\,du$ est la longueur de l'arc entre t_0 et t.

(ii) $\dfrac{dl}{dt} = \|F'(t)\| > 0$

Ainsi, la fonction l est de classe C^1 et de dérivée positive strictement : elle admet une fonction réciproque $s\to t(s)$ dont la dérivée est donnée par $t'(s) = \dfrac{1}{\|F'(t(s))\|}$.
On note $G(s)$ la fonction $G(s) = F(t(s))$. Elle définit la même courbe, mais avec un paramétrage différent. On l'appelle **paramétrisation unitaire** de F car on a $\|G'(s)\| = 1$.

Définition 1.7. *La courbure de $G(s)$ est donnée par $\rho(s) = \|G''(s)\|$.*

Proposition 1.8. *Si F n'est pas une paramétrisation unitaire alors la* **courbure** *est donnée par $\rho(t) = \dfrac{\|F'(t)\wedge F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3}$.*

1.2.2 Quelques exemples

Étude détaillée de la courbe de Lissajous définie par $t \mapsto (\cos(3t), \sin(2t))$ avec réduction de l'intervalle à $[0, \pi/2]$ via la périodicité et les ymétries, étude des variations, tangentes et tracer de la courbe.

Nous n'avons malheureusement pas plus de temps à consacrer à l'étude des courbes paramétrées. Pour voir d'autres exemples :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Clothode
http://fr.wikipedia.org/wiki/Cyclode
http://www.mathcurve.com

2 Dérivées des fonctions de plusieurs variables

Les fonctions de plusieurs variables sont des fonctions de chacune de leurs variables. Si elles sont dérivables par rapport à chaque variables comme fonctions d'une variable alors elles admettent des dérivées partielles. Le calcul des dérivées partielles se fait donc comme le calcul des dérivées des fonctions réelles de la variable réelles (les autres variables sont considérées comme des constantes). Mais en dimension supérieure, dire qu'une fonction est dérivable, n'est pas seulement dire qu'elle a des dérivées partielles. On dit qu'une fonction f est dérivable ou différentiable en un point si elle a une bonne approximation linéaire (ou affine) en ce point. Lorsque f et g sont dérivables alors les propriétés habituelles sont vérifiées. Mais $f'(x)$ n'est pas un nombre mais une matrice. Dans la formule de la dérivation des fonctions composées par exemple l'ordre a alors une grande importance.

Remarque : on écrit la plupart du temps on écrit les variables d'une fonction à plusieurs variables en ligne mais dans l'écriture du développement de Taylor on considère des vecteurs colonnes.

2.1 Dérivées partielles des fonctions à valeurs réelles

2.1.1 Rappels

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La dérivée de f en x, si elle existe, est : $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Exemple La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable de dérivée $f'(x) = 2x$. En effet la limite quand h tend vers 0 de

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

existe et vaut $2x$.

2.1.2 Dérivée partielle

Définition 2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i au point $a = (a_1, \ldots, a_d)$ si la fonction d'une variable*

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_d)$$

est dériable au point a_i. Dit autrement, on définit la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $a = (a_1, \ldots, a_d)$ par

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1\,,\,\ldots\,,\,x_i+h\,,\,a_{i+1}\,,\,\ldots\,,\,a_d) - f(a)}{h}$$

si cette limite existe.

Notation
Cela se note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$, $f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$, $D_i f(x_1, \dots, x_n)$.
Dans le cas de deux variables on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Exemple

(1) $f(x, y) = e^{xy^2}$

(2) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy$

(3) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(4) $f(x, y, z) = xy^2 + z$

2.1.3 Interprétation géométrique

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente à la courbe $z = f(x, y_0)$ en (x_0, y_0).

2.1.4 Gradient

Définition 2.2. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Son gradient en $a \in \mathbb{R}^d$, noté $\nabla f(a)$ est le vecteur $\nabla f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right)$.*

Exemple

(1) $f(x, y) = x^2 y^3$

(2) $f(x, y, z) = x^2 \sin(yz)$

Remarque
Le gradient peut être considéré comme un vecteur de $\mathbb{R}^d$ mais aussi comme une matrice $1 \times d$.

Théorème 2.3. *Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ avec des gradients, alors :*

(i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

(ii) $\nabla(cf) = c\, \nabla f$ *où* $c \in \mathbb{R}$

2.1.5 Dérivées partielles et continuité

Une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être continue!!

Exemples

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x\,,\,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

a des dérivées partielles en $(0\,,\,0)$ mais n'y est pas continue.

(2) $$f(x\,,\,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x\,,\,y) \neq (0\,,\,0) \\ 0 & \text{en}(0\,,\,0) \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en $(0\,,\,0)$.

Pour dépasser cette difficulté, on définit la différentielle (ou dérivée totale) ou on considère les fonctions ayant des dérivées partielles continues encore appelées fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

2.1.6 Dérivation composée

Théorème 2.4. *Si g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(r(t))$ où f est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et r dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$, alors g est dérivable et on a $g'(t) =< \nabla f(r(t)), r'(t) >$.*

Exemple

$$f(x\,,\,y) = xy^2$$

$$r(t) = (t\,,\,t^2)$$

2.1.7 Accroissements finis

On a un théorème des accroissements finis de manière similaire au cas d'une variable réelle.

Théorème 2.5. *Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $X = (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$, $H = (h_1\,,\,\ldots\,,\,h_n)$. Alors il existe $\theta \in]0\,,\,1[$ tel que $f(X+H) - f(X) =< \nabla f(X+\theta H), H >$.*

2.1.8 Dérivée selon un vecteur

Définition 2.6. *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $V \in \mathbb{R}^n$.*
La dérivée selon le vecteur V en X est définie par $D_V\, f(X) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(X+tV) - f(X)}{t}$.

Remarque
Si $V = e_i$, on retrouve $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Proposition 2.7. *On a $D_V\, f(X) = \nabla f(X) \cdot V$.*

Interprétation géométrique du gradient : direction de plus forte pente
La variation de f est la plus forte dans la direction de $\nabla f(X)$. En effet, si g est définie

sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(r(t))$ où f est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et r dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$, alors g représente l'évolution de f le long de la courbe r. Regardons en particulier l'évolution de f au point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ le long de la direction $v \in \mathbb{R}^d$, en choisissant pour r la courbe $r(t) = x_0 + tv$. La variation de f dans la direction v au point x_0 est donnée par la dérivé $g'(0) =< \nabla f(x_0), v >$. Par conséquent, la direction v dans laquelle f grandit le plus est donnée par les valeurs les plus grandes du produit scalaire $< \nabla f(x_0), v >$, c'est-à-dire lorsque le vecteur v est proportionnel au gradient $\nabla f(x_0)$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Comme illustration, l'hiver venu sur les pistes de ski, le skieur voulant aller vite choisit comme direction en un point de la piste celle de l'inverse du gradient (soit la direction de la plus grande pente descendante en un point de la montagne).

Interprétation géométrique du gradient (bis) : espace tangent aux niveaux de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
Notons $N_c = \{x \in \mathbb{R}^d | f(x) = c\}$ le niveau c de f. Soit $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée dont l'image est inclus dans N_c, et passant par le point $r(0) = x_0$. Alors la fonction $f \circ r$ est constante et égale à c, sa dérivée en $< \nabla f(x_0), r'(0) >$ est donc nulle : le gradient de f en x_0 est orthogonal à $r'(0)$, que l'on peut interpréter comme la direction de la tangente à la courbe r. En considérant toutes les courbes possibles passant par x_0, on en déduit donc une définition de l'espace tangent $T_{x_0}N_c$ au niveau N_c au point x_0 comme étant l'ensemble des directions des tangentes possibles en x_0, ou plus précisément

$$T_{x_0}N_c = \{x \in \mathbb{R}^d | < x - x_0, \nabla f(x_0) >= 0\}.$$

Interprétation géométrique du gradient (ter) : espace tangent au graphe de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
En procédant de la même manière avec des courbes $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d+1}$ dont l'image est contenue dans le graphe G_f de f, on voit que l'espace tangent T_0G_f au graphe de f au point $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ est l'ensemble

$$T_0G_f = \{(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} | z - f(x_0) =< \nabla f(x_0), x - x_0 >\}.$$

En effet, une telle courbe $r(t) = (x(t), z(t))$ satisfait $f(x(t)) = z(t)$ puisque qu'elle est incluse dans le graphe, et donc en dérivant on trouve que sa tangente au point $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ satisfait

$$z'(0) =< \nabla f(x(0)), x'(0) > .$$

2.2 La différentielle d'une fonction à valeurs réelles

Cas des fonctions d'une variable

(i) f est dérivable en X_0 si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(X_0 + h) - f(X_0)}{h}$ existe. Sa valeur ℓ est notée $f'(X_0)$.

(ii) On peut, de manière équivalente, écrire $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(X_0+h)-f(X_0)-\ell h}{h} = 0\,.$
On remarque que $h \to L(h) = \ell h$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle **différentielle** de f en X_0 et que l'on note $df(X_0)$.

(iii) Si f est dérivable en X_0 , alors pour h petit : $f(X_0+h)$ est voisin de $f(X_0)+f'(X_0)h$.
Donc $h \to f(X_0) + f'(X_0)h$ est une application affine qui "approche" $f(X_0+h)$.

Définition 2.8. *f est différentiable en X s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{f(X+H)-f(X)-L(H)}{\|H\|} = 0$$

L'application L est **la différentielle de f en X** *et se note $df(X)$.*

Remarque
On sait qu'une telle application linéaire L est donnée par $L(H) =< H, V >$ où V est un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Voir la proposition ci-dessous.

Remarque
Comme dans le cas $d = 1$ on a $f(X+H)$ "voisin" de $f(X)+df(X)(H)$, on a $f(X+H)$ est "approché" par l'application affine $f(X) + df(X)(H)$.
La différentielle, lorsqu'elle existe, est unique.

Proposition 2.9. *Si f est différentiable en X, alors ses dérivées partielles existent et on a :*

$$\begin{aligned} df(X)(H) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)\, h_1 + \ \ldots\ + \frac{\partial f}{\partial x_d}(X)\, h_d \\ &=< \nabla f(X), H > \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> On choisit de faire tendre H vers 0 le long des axes de coordonnées, on retrouve d'une part la définition des dérivées partielles de f, d'autre part les coordonnées du vecteur V qui décrit la différentielle de f. $\square$

Remarque
La matrice de l'application linéaire $df(X)$ dans la base canonique est le gradient $\nabla f(X)$.

Proposition 2.10. *Si f est différentiable en X alors f est continue en X.*

<u>Démonstration</u> Notons g la fonction définit par $g(H) = \frac{f(X+H)-f(X)-df(X)(H)}{\|H\|}$. Alors

$$f(X+H) = f(X) + df(X)(H) + \|H\|g(H)$$

et il est clair que $df(X)(H) + \|H\|g(H)$ tend vers 0 quand H tend vers le vecteur nul. Donc la limite de f en X existe et vaut $f(X)$, donc f est continue en X. $\square$

Remarque
L'existence des dérivées partielles de f n'implique pas la différentiabilité. Par exemple

la fonction $f(x\,,\,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x\,,\,y) \neq (0\,,\,0) \\ 0 & \text{en}(0\,,\,0) \end{cases}$ admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas différentiable en $(0\,,\,0)$. Mais :

Théorème 2.11. *Si f admet des dérivées partielles et si elles sont continues alors f est différentiable.*
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration □

Remarque
A contrario, une fonction peut être différentiable sans que ses dérivées partielles ne soient continues. Prendre par exemple la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Exemples et utilisation
Formes linéaires Fonctions homogènes

2.2.1 Règle de différentiation

Proposition 2.12. *Si f et g sont différentiables on a :*

(i) $d(f+g)(X) = df(X) + dg(X)$

(ii) $d(\lambda f)(X) = \lambda\, df(X)$

(iii) $d(fg)(X) = f(X)\, dg(X) + g(X)\, df(X)$

(iv) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(X) = \dfrac{g(X)\, df(X) - f(X)\, dg(X)}{g^2(X)}$

2.2.2 Remarques

Si $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, alors :

(i) Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est différentiable sur U et les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur U. Les réciproques ne sont pas vraies!!

(ii) Si f est différentiable en $X_0 \in U$ alors l'application affine $A(H) = f(X_0) + df(X_0) \cdot H$ a pour graphe l'espace tangent au graphe de f en X_0.

Exemple
Droite tangente
Plan tangent

2.2.3 Dérivées partielles successives

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_d)$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_d$, et il arrive souvent qu'elles soient elles-même dérivables.

Définition 2.13. *Si la dérivée partielle de la fonction* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *par rapport à la variable* x_i *existe, on la note* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ *et on dit qu'il s'agit d'une* **dérivée partielle seconde** *de* f.

Exemple
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3y^4$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12x^2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Théorème 2.14. *(Schwarz)*
Si toutes les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *et secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ *existent et sont continues dans une boule autour de* $a = (a_1, \ldots, a_d)$ *alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a)$$

2.3 La différentielle d'une fonction à valeurs vectorielles

On a déjà rencontré des fonctions à valeurs vectorielles. Quelques exemples :

1. De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:
   (a) $F(x\,,\,y) = (e^x\,\cos y\,,\,e^x\,\sin y)$
   (b) $F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta)$
2. De $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: $F(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$.
3. De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $F(x\,,\,y) = (x\,,\,y\,,\,x^2 + y^2)$.
4. De $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$ linéaire : $F(x_1 \ldots x_d) = A(x_1 \ldots x_d)$ où A est une matrice d colonnes et m lignes.
   On peut exprimer F en termes de composantes $F(x_1 \ldots x_d) = (f_1(x_1 \ldots x_d)\,,\,\ldots\,,\,f_m(x_1 \ldots x_d))$.

Pour la notion de continuité de les limites, on remplace dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$ les habituelles valeurs absolues par des normes.

Définition 2.15. *F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est* **différentiable** *en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une* **application linéaire** *L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que :*

$$\lim_{\|H\| \to 0} \frac{F(X+H) - F(X) - L(H)}{\|H\|} = 0\,.$$

L est la **différentielle** *de F en X et se note : $dF(X)$.*

Théorème 2.16. *$F = (f_1, \ldots, f_m)$ est différentiable en X si et seulement si ses fonctions composantes $f_1, \ldots, f_m$ sont différentiables et on a :*

$$dF(X)(H) \quad = \quad (< \nabla f_1(X), H >\,,\,\ldots\,,\,< \nabla f_m(X), H >)\,.$$

Définition 2.17. *La matrice*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix}$$

est la matrice de $dF(X)$ et est appelée **matrice jacobienne** *de F en X et se note : $J(F)(X)$.*

Théorème 2.18. *Si F a des composantes de classe $\mathcal{C}^1$ alors elles sont différentiables et F est également différentiable.*

Exemple

(i) Trouver la matrice jacobienne de F en $(1\,,\,1)$ de : $F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$.

(ii) Trouver la différentielle de $F(x\,,\,y\,,\,z) = (x\,,\,y\,,\,z)$.

(iii) Trouver la différentielle de $F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta)$.

2.3.1 Propriétés de la différentielle

Proposition 2.19. *Si F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire, alors $dF(X) = F$.*

Proposition 2.20. *Si F est différentiable en X alors F est continue en X.*

2.3.2 Différentielles des fonctions composées

Si F est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, si G est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^q$, alors $G \circ F$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.

Théorème 2.21. *Si F est différentiable en X, et si G est différentiable en $F(X)$, alors $G \circ F$ est différentiable en X et on a :*

$$d(G \circ F)(X) \quad = \quad dG(F(X)) \circ dF(X)\,.$$

Exemple
$F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$
$G(u\,,\,v) = (xy\,,\,\sin x\,,\,x^2\,y)$

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions différentiables. Écrivons $h = f \circ g$.

La fonction $f \circ g$ est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Sa “dérivée” est donc un vecteur ligne à p colonnes, la transposée de son gradient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

La fonction g est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Sa “dérivée” est la matrice $n \times p$ composée des vecteurs transposés des gradients des coordonnées de g. Si $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_2(x))$ (on devrait écrire ce vecteur en colonne si on voulait se conformer en toute rigueur aux choix du cours) la dérivée de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

La dérivée de $f$est donnée par la transposée de son gradient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

L'égalité matricielle $h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$ signifie donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit pour tout $i = 1, \ldots, p$ on a

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}.$$

Un exemple
Prenons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ deux fonctions différentiables définies par

$$f(x, y, z) = 2xy - 3(x + z),$$

$$g(x, y) = (x + y^4, y - 3x^2, 2x^2 - 3y).$$

On demande de calculer les dérivées partielles de la fonction de deux variables $h = f \circ g$. Pour $\frac{\partial h}{\partial x}$, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(g(x, y)) \frac{\partial (x + y^4)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(x, y)) \frac{\partial (y - 3x^2)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}(g(x, y)) \frac{\partial (2x^2 - 3y)}{\partial x},$$

Je vous laisse le calcul de la deuxième dérivée partielle de h en exercice.

3 Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et fonctions

On a déjà parlé des courbes paramétrées. On va généraliser cette étude aux nappes paramétrées, puis à l'étude géométrique des niveaux d'une fonction.

3.1 Nappes paramétrées

Si f une fonction de deux variables son graphe est une surface incluse dans $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, f(x, y)) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Une telle surface est un exemple de nappe paramétrée (par f).

Si f est une fonction partout dérivable alors son graphe admet en chaque point un plan tangent. Pour trouver des vecteurs appartenant au plan tangent en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ traçons deux courbes sur la surface dans des directions données par les coordonnées :

$$t \mapsto (x_0 + t, y_0, f(x_0 + t, y_0)) \quad t \mapsto (x_0, y_0 + t, f(x_0, y_0 + t))$$

et calculons les coordonnées de leurs vecteurs tangents à l'instant $t = 0$. On obtient, par dérivation composée,

$$(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)) \quad (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).$$

Ce sont deux vecteurs indépendants tangents à deux courbes tracées sur la nappe. Le plan tangent à la nappe paramétrée est le plan passant par (x_0, y_0) de direction engendrée par ces deux vecteurs. Pour obtenir une équation de ce plan on peut utiliser le produit vectoriel. Un vecteur normal au plan est donné par

$$(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)) \wedge (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1)$$

L'équation du plan tangent est donnée par :

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Plus généralement une nappe paramétrée est un ensemble décrit par deux paramètres

$$\{(f_1(s, t), f_2(s, t), f_3(s, t)) \ / \ (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Les vecteurs

$$(\frac{\partial f_1}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial f_2}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial f_3}{\partial s}(s_0, t_0)) \quad (\frac{\partial f_1}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial f_2}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial f_3}{\partial t}(s_0, t_0))$$

sont des vecteurs tangents à la surface au point image de (s_0, t_0). S'ils sont indépendants le paramétrage définit une surface en (s_0, t_0) et un vecteur normal à la surface est donné par le produit vectoriel des vecteurs précédents

$$(\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_3}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_3}{\partial s}\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_3}{\partial t}, \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial f_1}{\partial t})(s_0, t_0)$$

Si on note (a, b, c) les coordonnées de ce vecteur l'équation du plan tangent à la nappe paramétrée au point image de (s_0, t_0) est

$$a(x - f_1(s_0, t_0)) + b(y - f_2(s_0, t_0)) + c(z - f_3(s_0, t_0)) = 0.$$

(C'est simplement écrire que les vecteurs AM et (a, b, c) sont orthogonaux lorsque M a pour coordonnées (x, y, z) et A est le point image de (s_0, t_0), $(f_1(s_0, t_0), f_2(s_0, t_0), f_3(s_0, t_0))$.

3.2 Tangentes aux courbes (surfaces, hypersurfaces) de niveau

Donnons-une fonction de deux variables f. Que dire des ensembles $\{(x, y) \ / \ f(x, y) = c\}$? On les appelle les courbes de niveaux de la fonction f. C'est dire qu'on s'attend à ce que ces ensembles soient des courbes... Ce n'est toutefois pas toujours le cas ! Si par exemple f est constante égale à 0, alors les courbes de niveau sont toutes vides sauf la courbe de niveau 0 qui est égale à $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et son gradient n'est pas nul en (x_0, y_0) alors la courbe de niveau $f(x_0, y_0)$ définit bien une courbe au voisinage de (x_0, y_0). Cette courbe est régulière et on a déjà vu que l'équation de sa tangente est donnée par le gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Par exemple, la tangente en $(1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3})$ à la courbe de niveau 1 de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est la droite d'équation :

$$2/\sqrt{3}(x - 1/\sqrt{3}) + 2\sqrt{2/3}(y - \sqrt{2/3}) = 0.$$

On a de la même façon les équations des plans tangents aux surfaces de niveaux de fonctions de trois variables dérivables au voisinage de points en lesquels le gradient n'est pas nul. Par exemple le plan tangent à la surface $xyz = 1$ au point $(1/2, 1, 2)$ a pour équation :

$$2(x - 1/2) + (y - 1) + 1/2(z - 2) = 0.$$

On va proposer par la suite une étude plus précise des courbes de niveaux. Pour ce faire nous disposons du théorème des fonctions implicites, conséquence du théorème d'inversion local. Ce sont deux théorèmes très importants du calcul différentiel. Nous ne donnons pas la démonstration du théorème d'inversion locale. Nous donnons celle du théorème des fonctions implicites seulement en dimension 2.

3.3 Fonctions implicites – Inversion locale

3.3.1 Inversion locale

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $V = F(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 3.1. *F est* **inversible** *sur U s'il existe une application G de V dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G \circ F = \mathbf{1}_U$ et $F \circ G = \mathbf{1}_V$.*

Définition 3.2. *F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est* **localement inversible** *en $X_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe des ouverts U et V avec $X_0 \in U$ et $F(X_0) \in V$ et $F(U) = V$ tel que F est inversible sur U.*

Exemples

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^3$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$

(3) Si $A \in \mathbb{R}^n$, soit F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $F(X) = X + A$.

(4) $U = \{(r\,,\,\theta) \,/\, r > 0\,,\, 0 < \theta < \pi\}$
$F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\, r\,\sin\theta)$

Théorème 3.3. *(d'inversion locale)*
Soient F définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et X_0 un point intérieur à D. Alors si $dF(X_0)$ est inversible (en tant qu'application linéaire) F est localement inversible en F_0. Si G désigne son inverse locale, G est aussi de classe C^1 et en $Y = F(X)$, pour X proche de X_0, on a $dG(y) = dF(X)^{-1}$ (l'exposant désigne ici l'opération d'inversion d'une matrice).

Une démonstration de ce théorème est donnée en annexe.

3.3.2 Fonctions implicites : cas $f(x\,,\,y) = 0$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère la courbe de niveau $\{f(x\,,\,y) = 0\} = N_0$.

Définition 3.4. *On dit que la fonction $y = \varphi(x)$ est* **définie implicitement par** *$f(x\,,\,y) = 0$ si $f(x\,,\,\varphi(x)) = 0$, c'est-à-dire si $(x\,,\,\varphi(x)) \in N_0$.
Alors on dit que $y = \varphi(x)$ est une* **fonction implicite** *de $f(x\,,\,y) = 0$.*

Exemple

$f(x\,,\,y) = \ln(xy) - \sin x$ avec $xy > 0$
$f(x\,,\,y) = x^2 + y^2 - 1$. Faire un dessin !

Théorème 3.5. *(des fonctions implicites)*
*Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0\,,\,y_0)$ un point tel que $f(x_0\,,\,y_0) = 0$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0) \neq 0$ alors :*

(i) Il existe une fonction implicite $y = \varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur l'intervalle ouvert $B(x_0\,,\,\varepsilon)$, tel que pour tout $x \in B(x_0, \epsilon)$ on ait $y_0 = \varphi(x_0)$ et $f(x\,,\,\varphi(x)) = 0$.

(ii) De plus, la dérivée de φ est donnée par $\varphi'(x) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x))}$ en tout point de $B(x_0, \epsilon)$ où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x)) \neq 0$.

Démonstration C'est une conséquence du théorème d'inversion locale. Soit f une fonction C^1 de deux variables et (x_0, y_0) tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Considérons la fonction F définie par

$$F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

La matrice jacobienne de F est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule pas en (x_0, y_0). La matrice $dF(x_0, y_0)$ est donc inversible et d'après le théorème d'inversion locale, F est localement inversible en (x_0, y_0) : il existe $r > 0$ tel que F soit une bijection de la boule $B = B((x_0, y_0), r)$ sur son image et l'application inverse, appelons la G est C^1 sur l'ouvert $F(B)$. Écrivons $G(s, t) = (g_1(s, t), g_2(s, t))$ les coordonnées de G. Comme G est l'inverse de F on a, pour tout (s, t) dans $F(B)$ (en utilisant la définition de F) :

$$(s, t) = F(g_1(s, t), g_2(s, t)) = (g_1(s, t), f(g_1(s, t), g_2(s, t))).$$

On a donc les égalités : $g_1(s, t) = s$ et $f(s, g_2(s, t)) = t$. Les points (x, y) de B pour lesquels $f(x, y) = 0$ sont les points dont l'image par F est de la forme $(x, 0)$. Ce sont donc les points $G(x, 0)$ pour $(x, 0)$ dans $F(B)$, soit encore, d'après la forme de l'application G, les points $(x, g_2(x, 0))$ pour $(x, 0)$ dans $F(B)$. Or $F(B)$ est un ouvert contenant $(x_0, 0)$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $(x, y) \in B$, l'équation $f(x, y) = 0$ équivaut à $y = g_2(x, 0)$. Il suffit d'écrire $\phi(x) = g_2(x, 0)$ pour voir qu'on a bien établi le résultat souhaité. $\square$

Exemple
Le cas du cercle.
Étude au point $(lambda, 0)$ de $f(x\,,\,y) = x(x^2 + y^2) - \lambda(x^2 - y^2)$.

Remarque : On retrouve ainsi une équation de la tangente aux courbes de niveau.

3.3.3 Fonctions implicites : cas $f(x_1 \ldots x_n) = 0$

L'étude est similaire pour les hypersurfaces de niveau en plusieurs variables, où on va pouvoir exprimer une variable en fonction des autres si la dérivée partielle correspondante n'est pas nulle.

Théorème 3.6. *Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \neq 0$ alors :*

(i) *La fonction implicite* $x_n = \varphi(x_1 \ldots x_{n-1})$ *existe sur une boule ouverte* $B((x_{1,0} \ldots x_{n-1,0}), \varepsilon)$ *et on a :* $f(x_1 \ldots x_{n-1}, \varphi(x_1 \ldots x_{n-1})) = 0$.

(ii) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 \ldots x_{n-1}, \varphi(x_1 \ldots x_{n-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1 \ldots x_{n-1}, \varphi(x_1 \ldots x_{n-1}))}$$