

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

G. FICHOU

Table des matières

1	Introduction	3
2	L'espace \mathbb{R}^d	4
2.1	Produit scalaire, norme et distance dans \mathbb{R}^d	4
2.2	Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3	6
2.3	Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques	7
2.4	Topologie de \mathbb{R}^d	8
2.5	Suites dans \mathbb{R}^d	10
2.6	Ensembles compacts	10
3	Fonctions de plusieurs variables	12
3.1	Définitions	12
3.2	Représentation géométrique	14
3.3	Fonctions continues de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}	15
3.4	Etude de certaines surfaces quadratiques	18
3.5	Fonctions continues sur un ensemble compact	20

1 Introduction

Le cours porte sur les fonctions de plusieurs variables. Le terme n'est pas très précis. Prenons quelques exemples. En physique : le temps la distance la charge... En économie : le prix en fonction du capital et du travail. On peut imaginer des fonctions dont les variables ou les valeurs sont discrètes ou qualitatives. Dans le cours nous nous intéresserons au cas des fonctions définies sur des parties de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R}^k .

2 L'espace \mathbb{R}^d

2.1 Produit scalaire, norme et distance dans \mathbb{R}^d

Définition 2.1. Si $x = (x_1 \dots x_d)$ et $y = (y_1 \dots y_d)$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^d , on définit leur produit scalaire par :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$$

Définition 2.2. On appelle **norme** de x (ou longueur) $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ et la **distance** entre deux vecteurs $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposition 2.3. On a les propriétés suivantes :

- (1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- (3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- (4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$

Théorème 2.4. Le produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration

Soient x et y deux vecteurs et λ un nombre réel. Le nombre $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$ est positif ou nul. On peut développer ce produit scalaire en appliquant les propriétés de linéarité. On obtient :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= \langle \lambda x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \langle x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \langle x, \lambda x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

On obtient donc un polynôme de degré 2 en λ qui est positif ou nul pour tout λ . Cela signifie que le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul. Autrement dit on a

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0.$$

Dire que ce discriminant est nul est équivalent à dire qu'il existe λ pour lequel le polynôme est nul ou encore qu'il existe λ pour lequel $\|\lambda x + y\|^2 = 0$ ce qui est équivalent à $\lambda x + y = 0$. Autrement dit l'égalité ne peut être vérifiée que dans les cas où x et y sont colinéaires. On vérifie facilement que l'égalité est satisfaite lorsque x et y sont colinéaires (on a donc l'équivalence). \square

Donnons une autre façon de voir les choses. L'identité de Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^d x_i y_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq d} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^d y_i^2\right)$$

s'écrit ici

$$\langle x, y \rangle^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq d} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$$

et donne donc une justification à notre énoncé (la somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$ est positive ou nulle). Établissons l'identité de Lagrange.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^d x_i y_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^d x_i^2 y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i y_i x_j y_j + \sum_{1 \leq j < i \leq d} x_i y_i x_j y_j \\ &= \sum_{i=1}^d x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} x_i y_i x_j y_j \\ &= \sum_{i=1}^d x_i^2 y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq d} [x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - (x_i y_j - x_j y_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^d x_i^2 y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq d} [x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2] - \sum_{1 \leq i < j \leq d} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^d y_i^2\right) - \sum_{1 \leq i < j \leq d} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \end{aligned}$$

□

Théorème 2.5. La norme définie précédemment s'appelle **norme euclidienne** et vérifie :

- (i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- (ii) $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Démonstration Si $\|x\| = 0$ alors la somme $\sum_{i=1}^n x_i^2$ vaut 0. Comme tous les carrés sont positifs ou nuls, pour que leur somme soit nulle il faut qu'il soient tous nuls, autrement dit que tous les x_i soient nuls ce qui signifie bien que $x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$ alors $\|x\| = 0$. On a

$$\|\alpha x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha^2 \|x\|^2.$$

En prenant la racine carrée on obtient

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\|\alpha x\|^2} = \sqrt{\alpha^2 \|x\|^2} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\|x\|^2} = |\alpha| \|x\|.$$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

L'inégalité de Cauchy Schwarz permet aussi de définir la mesure d'un angle géométrique entre deux vecteurs : comme $\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$, si aucun des deux vecteurs n'est nul, alors le quotient $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$ est un nombre compris entre -1 et 1.

Définition 2.6. La mesure d'un **angle** entre deux vecteurs non nuls est $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant $\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$.

Définition 2.7. x et y de \mathbb{R}^n sont dits **orthogonaux** lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition 2.8. (plan dans \mathbb{R}^3)

Soient $A = (x_0, y_0, z_0)$ un point de \mathbb{R}^3 et $N = (a, b, c)$ un vecteur non nul. Le plan passant par A et orthogonal à N est $P = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x - A) \cdot N = 0\}$.

2.2 Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3

Définition 2.9. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , on définit le **produit vectoriel** de x et de y par : $x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - y_1 x_2)$.

Voici une autre définition du produit vectoriel. Supposons x et y fixés et considérons l'application

$$z = (z_1, z_2, z_3) \mapsto \det(x, y, z).$$

C'est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . Il existe donc des coefficients a_1, a_2, a_3 tels que, pour tous x, y on ait :

$$\det(x, y, z) = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3.$$

Si on note a le vecteur (a_1, a_2, a_3) alors cela s'écrit encore

$$\det(x, y, z) = \langle a, z \rangle.$$

On vérifie que le vecteur a ainsi défini a pour coordonnées $(x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - y_1 x_2)$, c'est le produit vectoriel de x et y .

Pour qui sait calculer un déterminant 3x3 en développant par rapport à la troisième colonne cela donne une façon simple de retrouver les coordonnées d'un produit vectoriel :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)z_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)z_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)z_3.$$

Théorème 2.10. *On a les propriétés suivantes :*

- (1) $x \wedge y = -y \wedge x$
- (2) $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$
- (3) $\alpha x \wedge y = x \wedge \alpha y = \alpha(x \wedge y)$
- (4) $\langle x, x \wedge y \rangle = 0$ et $\langle y, x \wedge y \rangle = 0$
- (5) $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2$ (*identité de Lagrange ; déjà vu*)

Démonstration : Je donne une démonstration basée sur les propriétés des déterminants (vous n'avez peut-être pas encore vu ces propriétés en AL2 ; cela viendra). Vous pouvez aussi vérifier ces propriétés en utilisant la définition analytique et en développant les expressions obtenues.

- (1) $\langle x \wedge y, z \rangle = \det(x, y, z) = -\det(y, x, z) = -\langle y \wedge x, z \rangle$
- (2) $\langle x \wedge (y + z), u \rangle = \det(x, y + z, u) = \det(x, y, u) + \det(x, z, u) = \langle x \wedge y, u \rangle + \langle x \wedge z, u \rangle = \langle x \wedge y + x \wedge z, u \rangle$
- (3) $\langle \alpha x \wedge y, u \rangle = \det(\alpha x, y, u) = \alpha \det(x, y, u) = \alpha \langle x \wedge y, u \rangle$
- (4) $\langle x, x \wedge y \rangle = \det(x, y, x) = 0$ et $\langle y, x \wedge y \rangle = \det(x, y, y) = 0$

□

Interprétation géométrique de $x \wedge y$

$\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin \theta$ est l'**aire du parallélogramme** engendré par x et y .

Démonstration : L'aire d'un parallélogramme est donnée par le produit longueur de la base fois hauteur. Un peu de trigonométrie montre que c'est égal à $\|x\| \|y\| \sin \theta$. Le point (5) ci-dessus donne

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \cos^2 \theta = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \theta.$$

□

2.3 Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

Plutôt que de repérer un point (x, y) du plan \mathbb{R}^2 par ses coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé formé par la base canonique, on peut le faire au moyen de sa distance à l'origine et de l'angle formé par le premier vecteur de la base canonique et le vecteur (x, y) .

La distance à l'origine est définie au moyen du produit scalaire comme ci-dessus. L'angle n'est pas déterminé de manière unique. Plusieurs choix sont possibles. On peut ainsi définir les coordonnées polaires d'un point du plan au moyen de l'application suivante :

$$]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

On aurait pu choisir (le choix est tout aussi bon) de faire varier θ dans $[-\pi, \pi[$. On n'attribue généralement pas de coordonnées polaires au point origine : il est facile de définir sa distance à l'origine, l'angle n'aurait pas de sens.

Dans \mathbb{R}^3 on définit les coordonnées sphériques d'un point au moyen de l'application

$$]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi).$$

Le couple $(\rho \sin \phi, \theta)$ forme les coordonnées polaires de la projection du point sur le plan d'équation $z = 0$. Là encore on aurait pu choisir d'autres intervalles pour domaines de θ et ϕ . En géographie par exemple la latitude qui correspond à ϕ varie de -90 à 90 degrés et c'est l'angle avec le plan de l'équateur qui la définit (pas l'angle avec l'axe pôle sud pôle nord). Pour une illustration très parlante des coordonnées sphériques on pourra regarder le premier chapitre du film *dimensions*¹

2.4 Topologie de \mathbb{R}^d

Définition 2.11. Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$.

On appelle $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d / \|x - a\| < r\}$ la **boule ouverte** de centre a et de rayon r .

Exemple

Dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 on retrouve les intervalles, les disques, les boules ouvertes.

Proposition 2.12. Soient $A \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Alors une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- (i) $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$
- (ii) $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A^c$ où $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$
- (iii) $\forall r > 0$, $B(x, r)$ contient des points de A et de A^c .

Définition 2.13. L'**intérieur** de A (noté $\text{int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$) est l'ensemble des points de \mathbb{R}^d vérifiant (i).

L'**extérieur** de A (noté $\text{ext } A$) est l'ensemble des points de \mathbb{R}^d vérifiant la condition (ii).

1. http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

La **frontière** (ou le bord) de A (notée ∂A) est l'ensemble des points de \mathbb{R}^d vérifiant la condition (iii).

La **fermeture** de A (notée \bar{A}) est la réunion de A et de ∂A .

Exemples dans \mathbb{R}^2

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| < 1\}$$

$$A = \{(n, 0) / n \in \mathbb{Z}\}$$

Définition 2.14. Un ensemble A de \mathbb{R}^d est :

(i) **ouvert** si $\forall a \in A, \exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$

(ii) **fermé** si A^c est ouvert.

Proposition 2.15. A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

A est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$.

La frontière de A est égale à $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Démonstration. Détailler le dernier point. \square

Exemples

$A_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert.

$A_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé.

$A_3 = A_1 \cup \{(1, 0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.

$]0, 1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert dans \mathbb{R} .

$]0, 1[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est ni ouvert ni fermé.

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$ est fermé dans \mathbb{R} .

$[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé dans \mathbb{R}^2 .

Proposition 2.16. 1. \mathbb{R}^d et \emptyset sont ouverts (et donc aussi fermés).

2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

3. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

2.5 Suites dans \mathbb{R}^d

Définition 2.17. Une suite dans \mathbb{R}^d est une famille de vecteurs $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$ indexée par l'ensemble des entiers naturels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Chaque terme de la suite x_n est un vecteur avec ses d coordonnées.

Définition 2.18. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** dans \mathbb{R}^d vers $b \in \mathbb{R}^d$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraîne $\|x_n - b\| < \varepsilon$.

De manière équivalente on peut définir la convergence d'une suite de vecteurs (x_n) par la convergence de chacune des suites réelles données par les coordonnées $x_{i,n}$, i allant de

1 à d , n variant dans \mathbb{N} (les suites des coordonnées sont indexées par n et il y en a d : $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$).

Une autre façon de dire que la suite (x_n) tend vers b est de dire que la suite réelle de nombre positifs ou nuls $(d(x_n, b))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Remarques

1. On dit que b est **la limite** de la suite (x_n) et on note $x_n \rightarrow b$.
2. $x_n \rightarrow b$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ la boule $B(b, \varepsilon)$ contient toute la suite sauf un nombre fini de x_n .

Proposition 2.19. *A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente contenue dans A et convergente, la limite est dans A .*

Cette proposition fournit un critère pour démontrer qu'un ensemble A n'est pas fermé : il suffit de trouver une suite de points de A convergeant vers un point n'appartenant pas à A .

Théorème 2.20. *Soit (x_n) une suite bornée. Il existe une sous-suite de (x_n) convergeant dans \mathbb{R}^d .*

2.6 Ensembles compacts

Définition 2.21. *$X \subset \mathbb{R}^d$ est compact si X est fermé et borné (borné veut dire qu'il existe $R > 0$ tel que $X \subset B(0, R)$).*

Exemples

$[0, 23]$ est un compact dans \mathbb{R} .

$\{(x, y) / x^2 + (y - 2)^2 \leq 6\}$ est un compact de \mathbb{R}^2 .

$[2, 3] \times [1, 3] \times [5, 7]$ est un compact dans \mathbb{R}^3 .

Théorème 2.22. *(Bolzano-Weierstrass)*

Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ compact.

Alors toute suite $(x_n) \subset X$ contient une sous-suite (x_{i_n}) qui converge vers un point de X .

3 Fonctions de plusieurs variables

3.1 Définitions

Définition 3.1. Une fonction f définie sur un sous-ensemble D de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R} (où D est un) s'appelle fonction numérique de n variables.

D est le domaine de définition de f .

$\{f(x) / x \in D\}$ est l'image de f .

$\{(x, f(x)) / x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ est appelé graphe de f .

Exemples²

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(x, y, z) = \text{Ln}(1 + x^2 + y^2)$$

Définition 3.2. Soient D et E deux parties de \mathbb{R}^d telles que $D \subset E$ et f et g deux fonctions définies respectivement sur D et E . On dit que g est un prolongement de f à E si pour tout $x \in D$ on a $f(x) = g(x)$. Dans cette situation, on dit aussi que f est la restriction de g à D .

Exemple

$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ qu'on prolonge en une fonction g définie sur \mathbb{R}^2 en posant $g(0, 0) = a$, où $a \in \mathbb{R}$.

Définition 3.3. Soient D une partie de \mathbb{R}^d , f une fonction définie sur D à valeurs dans \mathbb{R} et $x_0 \in D$.

On dit que f est majorée sur D s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $f(x) \leq M$.

On dit que f est minorée sur D s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $f(x) \geq m$.

On dit que f est bornée sur D si elle est à la fois majorée et minorée. Cela revient à dire qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $|f(x)| \leq M$.

Exemple

La fonction g précédente est borné sur \mathbb{R}^2 .

Définition 3.4. On dit que f a un minimum en x_0 si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq f(x_0)$.

On dit que f a un maximum en x_0 si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.

On dit que f a un minimum strict en x_0 si pour tout $x \in D$, $x \neq x_0$, on a $f(x) > f(x_0)$.

2. Les images données sont obtenues avec le logiciel Maple.

On dit que f a un maximum strict en x_0 si pour tout $x \in D$, $x \neq x_0$, on a $f(x) < f(x_0)$.

Exemple

Pour g , le point $(0, 1)$ est un minimum non strict, alors que $(1, 0)$ est maximum non strict.

Définition 3.5. On dit que f a un minimum local en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a $f(x) \geq f(x_0)$.

On dit que f a un maximum local en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.

On dit que f a un minimum local strict en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$, on a $f(x) > f(x_0)$.

On dit que f a un maximum local strict en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$, on a $f(x) < f(x_0)$.

Définitions

Soient D une partie de \mathbb{R}^d , f une fonction définie sur D à valeurs dans \mathbb{R} .

Si f est majorée, on appelle borne supérieure de f sur D le plus petit des majorants de f , soit le nombre réel noté $\sup_D f$ ou $\sup_{x \in D} f(x)$ défini par :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq \sup_D f, \quad \forall M < \sup_D f, \quad \exists x \in D, \quad f(x) > M.$$

Si f est minorée, on appelle borne inférieure de f sur D le plus grand des minorants de f , soit le nombre réel noté $\inf_D f$ ou $\inf_{x \in D} f(x)$ défini par :

$$\forall x \in D \quad f(x) \geq \inf_D f, \quad \forall m > \inf_D f, \quad \exists x \in D, \quad f(x) < m.$$

Si f est majorée sur D , on dit que f atteint sa borne supérieure s'il existe $x \in D$ tel que $f(x) = \sup_D f$.

Si f est minorée sur D , on dit que f atteint sa borne inférieure s'il existe $x \in D$ tel que $f(x) = \inf_D f$.

3.2 Représentation géométrique

- Cas d'une fonction de deux variables $f(x, y)$
 - a) On considère le graphe $G(f) = \{((x, y), f(x, y)) / (x, y) \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Exemples : $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Le graphe est un parabolôïde de révolution.

Le graphe $f(x, y) = y^2 - x^2$ est un parabolôïde hyperbolique :

b) On considère les courbes de niveau $\{(x, y) \in D / f(x, y) = C\}$.

Dans les exemples précédents, les courbes de niveau sont des cercles $\{(x, y) / x^2 + y^2 = C \geq 0\}$ et des hyperboles $\{(x, y) / x^2 - y^2 = C \geq 0\}$.

- Cas d'une fonction de plus de deux variables

Le graphe étant dans \mathbb{R}^4 , on ne peut le dessiner.

Si $n = 3$, on utilise les surfaces de niveau $\{(x, y, z) \in D / f(x, y, z) = C\}$.

Par exemple la surface de niveau 5 de la fonction $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ ressemble à peu près à

Remarque : il arrive qu'un logiciel ne donne pas de représentation fidèle de ce qui se passe au voisinage d'un point. Par exemple il est difficile de se rendre compte de ce qui se passe au voisinage de $(0, 0)$ pour la fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ en regardant l'image ;

3.3 Fonctions continues de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}

Définition 3.6. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}^d$) a pour limite b en x_0 si $x_0 \in \overline{D}$ et si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$x \in D, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Notation

Dans ce cas $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Définition 3.7. (i) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue en** $x_0 \in D$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(ii) f est **continue sur** D si et seulement si elle est continue en tout point de D .

Théorème 3.8. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur \mathbb{R}^d .

(ii) $\forall b \in \mathbb{R}^d, \forall x_p$ avec $x_p \rightarrow b$ on a : $f(x_p) \rightarrow f(b)$ dans \mathbb{R} .

(iii) $\forall F$ fermé de \mathbb{R} , $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^d / f(x) \in F\}$ est un fermé de \mathbb{R}^d .

(iv) $\forall \theta$ ouvert de \mathbb{R} , $f^{-1}(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^d / f(x) \in \theta\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^d .

Remarque

Si $D \neq \mathbb{R}^d$, il faut modifier les points (iii) et (iv), et dire que $f^{-1}(\theta)$ est un ouvert de D et $f^{-1}(F)$ est un fermé de D .

Démonstration

Il suffit de démontrer les implications successives (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (ii) : On se donne une fonction f continue et une suite (x_k) convergeant vers b et il s'agit de montrer que $(f(x_k))$ converge vers $f(b)$. Écrivons les définitions de l'hypothèse et de ce que nous cherchons à démontrer.

Hypothèses :

- Convergence de la suite (x_k) : $\forall \epsilon > 0 \exists K \forall k > K d(x_k, b) < \epsilon$.
- Continuité de la fonction (en b) : $\forall \alpha > 0 \exists \delta > 0 (d(x, b) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \alpha)$.

À montrer :

- Convergence de la suite $(f(x_k))$: $\forall \epsilon > 0 \exists K \forall k > K d(f(x_k), f(b)) < \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ pour que si $d(x, b) < \delta$ alors $|f(x) - f(b)| < \epsilon$ (c'est possible grce à la deuxième hypothèse). Prenons ensuite K tel que si $k > K$ alors $d(x_k, b) < \delta$ (c'est possible grce à la première hypothèse). Alors si $k > K$ on a $d(x_k, b) < \delta$, donc $|f(x_k) - f(b)| < \epsilon$.

(ii) \Rightarrow (iii) : On suppose que (ii) est vraie et on cherche à montrer qu'alors (iv) est vraie. Soit F un fermé. On veut montrer que $f^{-1}(F)$ est fermé. Autrement dit on veut montrer que toute suite convergente d'éléments de $f^{-1}(F)$ a sa limite dans $f^{-1}(F)$. Soit (x_k) une telle suite, x sa limite. Comme (ii) est vraie, $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x)$. D'autre part, pour tout k , x_k appartient à $f^{-1}(F)$. Autrement dit, pour tout k , $f(x_k)$ appartient à F . Mais F est fermé donc toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F . Or $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x)$. On a donc $f(x) \in F$ soit encore $x \in f^{-1}(F)$, ce qu'on voulait montrer.

(iii) \Rightarrow (iv) : Commençons par remarquer que pour toute partie E de \mathbb{R} , l'égalité

$$f^{-1}({}^c E) = {}^c f^{-1}(E),$$

est valable.

Supposons $f^{-1}(F)$ est fermé quand F est ouvert et donnons-nous un ouvert θ . Alors ${}^c \theta$ est fermé, donc $f^{-1}({}^c \theta)$ est fermé. Mais comme $f^{-1}({}^c \theta) = {}^c f^{-1}(\theta)$ cela signifie que ${}^c f^{-1}(\theta)$ est fermé, autrement dit que $f^{-1}(\theta)$ est ouvert.

(iv) \Rightarrow (i) : On suppose que (iii) est vraie et on cherche à montrer qu'alors (i) est vraie.

À montrer : $\forall b \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha > 0 \exists \delta > 0 (d(x, b) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \alpha)$.

Soient $b \in \mathbb{R}^d, \alpha > 0$. L'intervalle $]f(b) - \alpha, f(b) + \alpha[$ est un ouvert de \mathbb{R} . Par (iii) $f^{-1}(]f(b) - \alpha, f(b) + \alpha[)$ est un ensemble ouvert (auquel b appartient évidemment). Dire que cet ensemble est ouvert, c'est en particulier, dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, $B(b, \delta) \subset f^{-1}(]f(b) - \alpha, f(b) + \alpha[)$. Mais cette inclusion signifie que si $d(x, b) < \delta$ alors $|f(x) - f(b)| < \alpha$. C'est ce que nous voulions montrer. \square

Théorème 3.9. Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^d et f et g des fonctions continues sur D . Alors $f + g$ et fg sont continues sur D . De plus $\frac{f}{g}$ est continue en tout point où g ne s'annule pas.

Démonstration Le plus simple est peut-être d'utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité : nous avons à montrer que, pour tout point x en lequel f et g sont définies, pour toute suite $(y_k)_k$ convergeant vers x , les suites $(f(y_k)+g(y_k))_k$, $(f(y_k)g(y_k))_k$, $(f(y_k)/g(y_k))_k$ convergent respectivement vers $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$. Par hypothèse f et g sont continues donc $(f(y_k))_k$ et $(g(y_k))_k$ tendent vers $f(x)$ et $g(x)$. Or, on sait que si deux suites de nombres réels $(u_k)_k$, $(v_k)_k$ tendent vers l et l' alors les suites $(u_k + v_k)_k$, $(u_k.v_k)_k$, $(u_k/v_k)_k$ convergent respectivement vers $l + l'$, ll' , l/l' . Il suffit donc d'appliquer ce résultat pour $u_k = f(y_k)$ et $v_k = g(y_k)$.

Il y a quand même un petit problème avec le quotient quand $g(x)$ vaut 0. Ce n'est pas parce que $g(x)$ vaut 0 que le quotient n'a pas de limite en x ; cela peut arriver mais dépend des fonctions considérées. Ce qui est sûr en revanche c'est que si $g(x)$ n'est pas nul, alors le quotient f/g est continu en x . Il faut être plus précis dans ce cas. Si $g(x)$ n'est pas nul, alors comme $(g(y_k))_k$ tend vers $g(x)$, à partir d'un certain rang $g(y_k)$ est différent de 0, le quotient $(f(y_k)/g(y_k))_k$ est alors défini à partir d'un certain rang et tend vers $f(x)/g(x)$. \square

Théorème 3.10. *Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^d et E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont continues, avec l'image de E par g incluse dans D , alors $f \circ g$ est continue sur E .*

Exemple d'application de ce résultat Comme $|x - x'| \leq \|(x, y) - (x', y')\|$ et $|y - y'| \leq \|(x, y) - (x', y')\|$, les applications définies par $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

D'après le théorème précédent les applications définies par $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, puis $(x, y) \mapsto x^2 + 3xy$ et toutes les fonctions polynôme en deux variables x et y sont continues sur \mathbb{R}^2 .

De la même façon toutes les fractions rationnelles en deux variables sont continues là où elles sont définies.

Autres exemples

$f(x, y) = e^{xy}$ continue sur \mathbb{R}^2

$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Remarque : vous voyez qu'il n'est pas évident à la vue des deux images précédentes de deviner que la première fonction est continue sur \mathbb{R}^2 et l'autre non.

3.4 Etude de certaines surfaces quadratiques

On cherche à étudier les polynômes quadratiques de la forme $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$.

Pour ce faire nous allons utiliser l'identité remarquable vue au collège : $(x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ en écrivant quand il le faudra $x^2 + 2\alpha x = (x + \alpha)^2 - \alpha^2$. Si L n'est pas nul, on peut écrire

$$\begin{aligned} Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 &= L(x^2 + 2Mxy/L + Ny^2/L) \\ &= L((x + My/L)^2 - M^2y^2/L^2 + Ny^2/L) \\ &= L((x + My/L)^2 + (NL - M^2)y^2/L^2). \end{aligned}$$

Ceci permet de voir que si $NL - M^2$ est strictement positif alors dans la parenthèse on trouve la somme de deux carrés et le graphe est un paraboloïde elliptique ("tourné" vers le haut si $L > 0$, vers le bas si $L < 0$). Si $NL - M^2$ est strictement négatif alors dans la parenthèse on trouve la différence de deux carrés et le graphe est un paraboloïde hyperbolique.

Si N n'est pas nul, en procédant de la même façon, on peut écrire

$$\begin{aligned} Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 &= N(Lx^2/N + 2Mxy/N + y^2) \\ &= N(Lx^2/N + (y + Mx/N)^2 - M^2x^2/N^2) \\ &= N((LN - M^2)x^2/N^2 + (y + Mx/N)^2). \end{aligned}$$

On obtient que si $LN - M^2$ est strictement positif alors le graphe est un paraboloïde elliptique ("tourné" vers le haut si $N > 0$, vers le bas si $N < 0$). Si $NL - M^2$ est strictement négatif alors dans la parenthèse on trouve la différence de deux carrés et le graphe est un paraboloïde hyperbolique.

Dans le cas où L et N ne sont pas nuls tous les deux, ces deux façons de faire donne bien les mêmes résultats. En effet, si $LN - M^2$ est strictement positif alors en particulier $LN > 0$ autrement dit L et N ont le même signe (l'orientation du paraboloïde elliptique est bien déterminée de la même façon).

Si L et N sont tous les deux nuls, et M est différent de 0, alors le graphe est un paraboloïde hyperbolique. Pour le voir il suffit d'écrire (encore une identité remarquable!) :

$$2Mxy = M(x + y)^2/2 - M(x - y)^2/2.$$

Quelque soit le signe de M nous avons une différence de deux carrés.

Enfin reste le cas où $LN - M^2$ est nul. On a alors

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = L(x + My/L)^2$$

(quand $L \neq 0$ par exemple), et le graphe est un cylindre parabolique.

Exemples :

- $2x^2 - 6xy + y^2$

On calcule $2 \cdot 1 - 3^2 = -7 < 0$. Le graphe est un paraboloïde hyperbolique :

- $2x^2 - 2xy + 3y^2$

On calcule $2 \cdot 3 - 2^2 = 2 > 0$ et $2 > 0$. Le graphe est un parabololoïde elliptique tourné vers le haut :

- $-x^2 + 2xy - 3y^2$

On calcule $(-1) \cdot (-3) - 1^2 = 1 > 0$ et $-1 < 0$. Le graphe est un parabololoïde elliptique tourné vers le bas :

- $x^2 + 2xy + y^2$

On calcule $1 \cdot 1 - 1^2 = 0$. Le graphe est un cylindre parabolique :

Remarque : comme vous le voyez, il n'est pas toujours facile de reconnaître un parabololoïde hyperbolique ou un parabololoïde elliptique sur l'image donnée par l'ordinateur.

Proposition 3.11. *Il existe des coordonnées orthogonales X, Y, Z dans lesquelles $Z = k_1 X^2 + k_2 Y^2$.*

3.5 Fonctions continues sur un ensemble compact

Théorème 3.12. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (avec X compact) continue. Alors :*

(i) *f est bornée sur X .*

(ii) *f atteint ses bornes inférieure et supérieure.*

Démonstration Utilisons encore les suites. Supposons que f ne soit pas bornée. Alors on peut trouver une suite (x_k) telle que $(f(x_k))$ tende vers $+\infty$ ou $-\infty$. Considérons par exemple le cas où $(f(x_k))$ tend vers $+\infty$. Comme X est compact, il existe une sous-suite $(x_{k_l})_l$ convergeant vers un point x de X . On a alors $\lim_l f(x_{k_l}) = +\infty$ et $\lim_l f(x_{k_l}) = f(x)$ (par continuité de f). Contradiction. L'hypothèse faite est absurde : f est bornée.

Reste à montrer qu'elle atteint ses bornes. On procède de manière analogue. Montrons le pour la borne inférieure.

Il existe une suite (x_k) telle que $(f(x_k))$ tende vers $\inf_X f$. X est compact, il existe une sous-suite $(x_{k_l})_l$ convergeant vers un point x de X . On a alors $\lim_l f(x_{k_l}) = \inf_X f$ et $\lim_l f(x_{k_l}) = f(x)$ (par continuité de f). Conclusion : $f(x) = \inf_X f$, autrement dit $\inf_X f$ est atteinte. \square

Définition 3.13. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Théorème 3.14. Soit f continue de X dans \mathbb{R} avec X compact. Alors f est uniformément continue sur X .

Démonstration Nous allons raisonner par l'absurde. Considérons une fonction f continue sur un ensemble compact X . Supposons que f ne soit pas uniformément continue. Alors la phrase

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

est fausse, c'est-à-dire que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \exists x, y \text{ avec } \|x - y\| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver x_n et y_n deux points de X distants de moins de $1/n$ tels que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. On obtient ainsi deux suites d'éléments de X . Comme X est compact, on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite convergente. Soient $(x_{n_k})_k$ une telle suite et x_* sa limite. Alors $(y_{n_k})_k$ converge aussi vers x_* car $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| < 1/n_k$. Comme f est continue en x_* on a $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k f(y_{n_k}) = f(x_*)$. Mais par construction on a aussi, pour tout k , $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. Contradiction. \square