Contrôle continu 2

Durée : 1h. Les documents et calculatrices sont interdits.

Connaissances élémentaires (2 points)
Déterminer l'aire de la surface de $\mathbb{R}^2$ définie par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ } et \text{ } 0 \leq y \leq x^2\}$.

Questions de cours (4 points)

1. Rappeler la définition d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable de gradient non nul au point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de niveau de f passant par (x_0, y_0).

Exercice 1. VRAI/FAUX (6 points ; une bonne réponse correctement justifiée rapporte 2 points, une mauvaise zéro point). Préciser, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.

1. Le sous-ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + xyz^3 - y^2 z < 2\}$ de $\mathbb{R}^3$ est ouvert.
2. La fonction $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.
3. Le gradient de la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ au point $(1,1)$ est égal à $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Exercice 2. (4 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On justifiera soigneusement les réponses.

1. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Est-ce que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. (4 points)

1. Calculer la matrice jacobienne de l'application $(x,y) \mapsto (x^2 + y^3, \sin(x+2y))$ au point $(\pi, \pi/2)$.
2. Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Posons $F(x,y) = f(x + g(y))$. Calculer
$$\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big)\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big) - \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big)\Big(\frac{\partial F}{\partial x}\Big)$$
en tout point de $\mathbb{R}^2$.