Contrôle continu du 26 octobre 2017

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.
On justifiera soigneusement tous les résultats énoncés. Durée : 2 heures.

Questions de cours

(1) Soient A et B des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblables (on rappelle que A et B sont dites semblables s'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que les polynômes caractéristiques de A et B sont égaux.

(2) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 1. *Soient* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$.

(1) *Vérifier que* (v_1, v_2, v_3) *forme une base de* $\mathbb{R}^3$ *et calculer sa base duale.*

(2) *On considère* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique.*
Orthonormaliser la famille (v_1, v_2, v_3) *par le procédé de Gram-Schmidt.*

(3) *Donner la décomposition* QR *de la matrice de* $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ *dont les colonnes sont formées par les vecteurs* v_1, v_2 *et* v_3.

Exercice 2. *Considérons les matrices suivantes dans* $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) *Démontrer que la matrice* D *est diagonalisable. Déterminer* P *telle que* $P^{-1}DP$ *est diagonale (on ne demande pas de calculer* P^{-1}*).*

(2) *Calculer les polynômes caractéristiques et minimaux de* A, B *et* C.

(3) *Parmi* A, B *et* C, *lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ? Laquelle de ces matrices est semblable à* D *?*

Exercice 3. *Soit* A *la matrice donnée par* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *où* a *est dans* $\mathbb{R}$.

(1) *Pour quelles valeurs de* a *la matrice* A *est-elle trigonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*

(2) *Pour quelles valeurs de* a *la matrice* A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 4. *Le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est* $-(X+1)^3$.

(1) *Déterminer la forme de Jordan* J *de* A.

(2) *Déterminer la décomposition de Dunford-Jordan de* J.

(3) *Calculer* P *telle que* $P^{-1}AP = J$ *(on ne demande pas de caculer* P^{-1}*).*

(4) *Calculer* e^J.

(5) *Exprimer* e^A *en fonction de* P *et* e^J.