Corrigé du contrôle continu du 26 octobre 2017

Questions de cours

(1) On a $B-xI = P^{-1}AP-xP^{-1}P = P^{-1}(A-xI)P$ d'où $P_B(x) = (\det P^{-1})P_A(x)(\det P)$ et on conclut en utilisant que $(\det P^{-1})(\det P) = \det P^{-1}P = 1$.

(2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $P_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

Exercice 1. (1) *La famille (v_1, v_2, v_3) est libre car le déterminant de la matrice A formée de ces trois vecteurs est non nul. Calculons sa base duale (v_1^*, v_2^*, v_3^*). On cherche la forme linéaire v_1^* sous la forme $v_1^*(x, y, z) = ax + by + cz$, les conditions sur a, b et c étant données par $v_1^*(v_1) = 1$, $v_1^*(v_2) = 0$ et $v_1^*(v_3) = 0$. La résolution du système correspondant*

$$\begin{cases} a+c & = 1 \\ a+b+c & = 0 \\ -a+b & = 0 \end{cases}$$

donne $a = -1$, $b = -1$ et $c = 2$ d'où v_1^* est la forme linéaire définie par $v_1^*(x, y, z) = -x-y+2z$. En faisant de même, on trouve que v_2^* est la forme linéaire définie par $v_2^*(x, y, z) = x + y - z$ et v_3^* est la forme linéaire définie par $v_3^*(x, y, z) = -x + z$.

(2) *L'application du procédé de Gram-Schmidt conduit à la famille (w_1, w_2, w_3) définie par $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.*

(3) *La matrice Q a pour vecteurs colonnes w_1, w_2 et w_3 d'où $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.*
On trouve alors $R = Q^{-1}A$ qui est aussi égale à ${}^tQA$ puisque Q est une matrice orthogonale. Ainsi $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 2. (1) *Le calcul du polynôme caractéristique donne $P_D(x) = -(x-1)(x-2)^2$. Or un calcul montre que $(D-I)(D-2I) = 0$, donc le polynôme minimal de D est $\pi_D(x) = (x-2)(x-1)$ qui est scindé à racines simples. Ainsi D est diagonalisable. Le calcul des espaces propres donne qu'avec $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ on obtient $P^{-1}DP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.*

(2) *Les matrices étant triangulaires, on obtient $P_A(x) = P_B(x) = (1-x)(2-x)^2$ et $P_C(x) = -x(x-1)(x-2)$.*
Or un calcul montre que $(A-I)(A-2I) \neq 0$ donc $\pi_A = -P_A$. Par contre $(B-I)(B-2I) = 0$ donc $\pi_B(x) = (x-1)(x-2)$.
Enfin $\pi_C = -P_C$ car les racines de P_C sont racines de π_C, et π_C divise P_C.

(3) *Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples, donc seules B et C sont diagonalisables.*
Enfin D étant diagonalisable, A ne peut lui être semblable. C non plus car elles n'ont pas le même polynôme caractéristique. Enfin B est diagonalisable tout comme D, et $P_B = P_D$ donc B et D sont semblables.

Exercice 3. (1) *Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (1-x)(x^2-a)$. Ainsi A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc si et seulement si $a \geq 0$.*

(2) *Déjà il est nécessaire que $a \geq 0$ d'après 1). Si $a > 0$ et $a \neq 1$, alors A admet trois valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Si $a = 1$, alors $P_A(x) = (1-x)^2(1+x)$ et A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est à racines simples. Or dans ce cas $(A-I)(A+I) = 0$ donc $\pi_A = (x-1)(x+1)$ et A est diagonalisable. Enfin si $a = 0$ alors $P_A(x) = (1-x)x^2$ et $A(A-I) \neq 0$ donc $\pi_A = P_A$ n'est pas à racines simples donc A n'est pas diagonalisable.*
Au final, A est diagonalisable si et seulement si $a > 0$.

Exercice 4. (1) *Les matrices $A+I$ et $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont non nulles, donc la forme de Jordon de A est $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Un autre argument est le calcul de la dimension de l'espace propre associée à la seule valeur propre, qui donne une dimension de 1.*

(2) *Dans le cas de la forme de Jordan, la décomposition est simplement $J = -I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En effet $-I$ et N commutent.*

(3) *On peut construire P de la forme $P = (v_1\ v_2\ v_3)$ avec v_3 un vecteur qui n'appartient pas au noyau de $(A+I)^2$. Ce noyau est décrit par l'équation linéaire $-x+y+z = 0$ d'après (1). On peut donc choisir $v_3 = e_3$ par exemple. On choisit alors $v_2 = (A+I)v_3 = e_1 + e_3$ et enfin $v_1 = (A+I)v_2 = e_1 + e_2$. Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.*

(4) *On a $e^J = e^{-I}e^N$ car $-I$ et N commutent. Or $-I$ est diagonale donc $e^{-I} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$ et par ailleurs $e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $N^3 = 0$, d'où*

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} & e^{-1}/2 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

(5) *Puisque $A = PJP^{-1}$, on a d'après le cours $e^A = Pe^JP^{-1}$.*