Éléments de correction du contrôle continu du 22 octobre 2019

Exercice 1. (1) La matrice des coefficients de la famille (l_1, l_2, l_3) dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est non nulle (il vaut 4), la matrice M est donc inversible. Ainsi la famille (l_1, l_2, l_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

(2) D'après le cours, la matrice des coordonnées de (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est ${}^tM^{-1}$. On obtient

$${}^tM^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $v_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (1) La matrice A est symétrique, donc diagonalisable. Son polynôme minimal est donc scindé à racines simples. C'est donc $\mu_A(X) = (X-1)(X-2)$ puisqu'il a les mêmes racines que χ_A.

(2) Comme A est diagonalisable, la dimension de $E_2(A)$ est égale à la multiplicité de la racine 2 dans χ_A, donc vaut 3. On vérifie que v_1, v_2 et v_3 sont bien des vecteurs propres. De plus les coefficients de v_1, v_2 et v_3 sont échelonnés, donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Comme elle possède trois éléments, c'est bien une base de $E_2(A)$.

(3) On obtient $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) Il reste à trouver l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, qui est de dimension un. Un vecteur propre est $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, qu'il reste à normer en $w_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour obtenir une base orthonormée (w_1, w_2, w_3, w_4) vu que les

espaces propres de A sont orthogonaux (car A est symétrique). Ainsi

$$O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \end{pmatrix}$$

convient.

Exercice 3. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (X-1)^3$.

(1) Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est triangularisable sur $\mathbb{R}$. Par contre le polynôme minimal n'est pas $X-1$ (sinon $A = I$) donc n'est pas à racines simples. En particulier A n'est pas diagonalisable.

On vérifie que $\mu_A(X) = \chi_A(X)$.

(2) La forme de Jordan de A est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\mu_A(X) = (X-1)^3$. Il existe donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de Dunford-Jordan est donc (d'après le cours)

$$A = PIP^{-1} + PN'P^{-1}$$

où

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or $PIP^{-1} = I$ donc la décomposition de Dunford-Jordan de A est $A = D + N$ avec $D = I$ diagonalisable (même diagonale), $N = A - I$ nilpotente et D et N commutent.

On vérifie $N^3 = 0$ alors que

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Puisque I et N commutent, on obtient :

$$e^A = e^{I+N} = e^I e^N = e(I + N + \frac{1}{2}N^2) = \frac{e}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$