Contrôle continu du 22 octobre 2019

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.
On justifiera soigneusement tous les résultats énoncés. Durée : 2 heures.

Questions de cours

(1) Énoncer le théorème de la décomposition QR.

(2) Donner la définition d'une matrice symétrique positive.

(3) Donner la définition d'une norme matricielle.

Exercice 1. Considérons les formes linéaires l_1, l_2 et l_3 sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} l_1(x,y,z) &= x+2z, \\ l_2(x,y,z) &= -y+z, \\ l_3(x,y,z) &= x-2y. \end{aligned}$$

(1) Montrer que (l_1, l_2, l_3) est une base du dual $(\mathbb{R}^3)^*$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer la base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ dont (l_1, l_2, l_3) est la duale.

Exercice 2. Considérons la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^3$.

(1) Quel est le polynôme minimal de A ?

(2) Vérifier que l'espace propre $E_2(A)$ de A associée à la valeur propre 2 est engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) Orthonormaliser la famille (v_1, v_2, v_3) par le procédé de Gram-Schmidt.

(4) Déterminer une matrice orthogonale $O \in O_4(\mathbb{R})$ telle que ${}^tOAO$ soit diagonale.

Exercice 3. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (X-1)^3$.

(1) Est-ce que A est diagonalisable ? Triangularisable sur $\mathbb{R}$?

(2) Déterminer la décomposition de Dunford-Jordan de A.

(3) Calculer la matrice exponentielle e^A de A.