Corrigé du contrôle continu du 26 octobre 2018

Questions de cours : voir le cours.

Exercice 1. (1) Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc ils engendrent bien un espace vectoriel H de dimension deux. L'annulateur H^o de H est l'ensemble des formes linéaires $l(x,y,z) = ax + by + cz$ sur $\mathbb{R}^3$, avec a, b et c des réels, qui sont nulles sur H. Une telle forme l est nulle sur H si et seulement si elle est nulle sur v_1 et v_2, c'est-à-dire si et seulement si $a - c = 0$ et $-a + b + c = 0$. La résolution de ce système permet de dire que $b = 0$ et $a = c$, et donc H^o est le sous-espace vectoriel de dimension 1 du dual de $\mathbb{R}^3$ engendré par la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto x + z$.

(2) Il suffit de choisir v_3 en dehors de H, par exemple $v_3 = {}^t(0,0,1)$ convient car la forme linaire de la question précédente est non nulle sur v_3. Ou encore, le déterminant de la matrice ayant pour colonnes $(v_1\ v_2\ v_3)$ est non nul (il vaut 1).

Notons (v_1^*, v_2^*, v_3^*) la base duale associée. Alors v_1^* est la forme linéaire $v_1^* : (x,y,z) \mapsto ax + by + cz$ déterminée par les conditions $v_1^*(v_1) = 1$, $v_1^*(v_2) = 0$ et $v_1^*(v_3) = 0$. Les coefficients a, b et c satisfont donc à

$$a - c = 1,\ -a + b + c = 0,\ c = 0$$

d'où $v_1^*(x,y,z) = x + y$. On obtient de même $v_2^*(x,y,z) = y$ et $v_3^*(x,y,z) = x + z$.

De manière équivalente, la matrice C des coefficients de (v_1^*, v_2^*, v_3^*) dans la base canonique du dual de $\mathbb{R}^3$ est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui l'inverse de la transposée de la matrice des coefficients de (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pouvait bien évidemment faire d'autres choix pour v_3. Par exemple avec $v_3 = {}^t(1,0,0)$, on trouvait pour C la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ou encore pour $v_3 = {}^t(1,0,1)$, on trouvait

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(3) On applique la méthode Gram-Schmidt pour obtenir d'abord une famille (w_1, w_2, w_3) orthogonale. Posons $w_1 = v_1$, puis

$$w_2 = v_2 - \frac{< w_1, v_2 >}{< w_1, w_1 >} w_1$$

d'où $w_2 = {}^t(0,1,0)$. De même

$$w_3 = v_3 - \frac{< w_1, v_3 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< w_2, v_3 >}{< w_2, w_2 >} w_2 = {}^t(1/2, 0, 1/2).$$

Il reste à normaliser la famille obtenue pour obtenir la famille (v_1', v_2', v_3') donnée par $v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\, {}^t(1,0,-1)$, $v_2' = {}^t(0,1,0)$ et $v_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\, {}^t(1,0,1)$.

(4) Avec le choix de v_3 fait ici, on obtient donc

$$Q = (v_1' \; v_2' \; v_3') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'on a bien $A = QR$.

Là encore, le choix de v_3 fait à la question 2 modifie le résultat pour le couple (Q, R).

Exercice 2. (1) Les matrices A et B sont triangulaires, d'où

$$\chi_A(X) = (2-X)(X-1)^2, \; \chi_B(X) = (1-X)(X-2)^2.$$

Un calcul de déterminant donne

$$\chi_C(X) = (2-X)(X-1)^2.$$

Le polynôme minimal a les mêmes racines que le polynôme caractéristique et il le divise. Or $(A-2I)(A-I) \neq 0$ donc $\mu_A = -\chi_A$. De plus $(B-2I)(B-I) = 0$ donc $\mu_B(X) = (X-2)(X-1)$. Enfin $(C-2I)(C-I) \neq 0$ donc $\mu_C = -\chi_C$.

(2) Seule B a son polynôme minimal scindé à racines simples, donc seule B est diagonalisable.

(3) Déjà la matrice B n'est pas semblable à la matrice C car elles n'ont pas le même polynôme caractéristique. Par contre A et C sont semblables. En effet, elles sont toutes les deux triangularisables car $\chi_A = \chi_C$ est scindé sur $\mathbb{R}$, et leur forme de Jordan sont identiques, et égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(notez qu'on peut échanger le bloc pour la valeur propre 1 avec celui pour la valeur propre 2, cela change la matrice mais reste la même forme de Jordan). En effet, il y a forcément un 1 au dessus de la diagonale dans le bloc de Jordan correspondant à la valeur propre 1 car elles ne sont pas diagonalisables. Or deux matrices semblables à une même troisième matrice sont semblables entre elles.

Notez qu'un argument du type A et C ont les mêmes polynômes minimaux et caractéristiques n'est pas suffisant en général, il existe des matrices non semblables qui ont les mêmes polynômes minimaux et caractéristiques.

Exercice 3. (1) Un calcul de déterminant donne que le polynôme caractéristique de A est $\pi_A(X) = (2-X)^3$. Puisque

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est différent de la matrice nulle, le polynôme minimal μ_A de A est égal à $-\chi_A$.

(2) La matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car μ_A n'est pas à racines simples.

(3) Par contre χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est triangularisable sur $\mathbb{R}$. Sa forme de Jordan J est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

car le polynôme minimal de J est le même que celui de A, donc est $(X-2)^3$. En effet, $(J-2I)^2$ est non nulle.

(4) D'après le cours, on construit les colonnes de P en choisissant trois vecteurs v_1, v_2, v_3 tels que v_3 est dans le noyau de $(A-2I)^3$ (qui est égale à la matrice nulle d'aprs le théorème de Cayley-Hamilton), mais pas dans celui de $(A-2I)^2$, puis en posant $v_2 = (A-2I)v_3$ et $v_1 = (A-2I)v_2$. Par exemple $v_3 = {}^t(1,0,0)$ convient (il n'est pas dans le noyau de $(A-2I)^2$). On en déduit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) La décomposition de Dunford-Jordan de A est donnée par $A = D + N$ avec A diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$ où $D = P(2I)P^{-1}$ et $N = P(J-2I)P^{-1}$. Remarquons que $D = 2I$, on en déduit donc (sans même avoir à calculer P^{-1}) que

$$N = A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sinon, le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on retrouve

$$N = P(J-2I)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$