Contrôle continu du 26 octobre 2018

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.
On justifiera soigneusement tous les résultats énoncés. Durée : 2 heures.

Questions de cours

(1) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace vectoriel euclidien.
(2) Donner la définition d'une matrice orthogonale.
(3) Donner un exemple de matrice à coefficients réels qui n'est pas triangularisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(1) Vérifier que l'espace engendré par v_1 et v_2 forme un plan H de $\mathbb{R}^3$. Quel est l'annulateur H^o de H ?
(2) Compléter la famille (v_1, v_2) en une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$. Calculer la base duale associée.
(3) On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
Orthonormaliser la famille (v_1, v_2, v_3) par le procédé de Gram-Schmidt.
(4) Donner la décomposition QR de la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées par les vecteurs v_1, v_2 et v_3.

Exercice 2. Considérons les matrices suivantes dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer les polynômes caractéristiques et minimaux de A, B et C.
(2) Parmi A, B et C, lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ?
(3) La matrice A est-elle semblable à C ? La matrice B est-elle semblable à C ?

Exercice 3. Soit A la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer le polynôme caractéristique π_A et le polynôme minimal μ_A de A.
(2) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
(3) Justifier que A est triangularisable sur $\mathbb{R}$. Donner sa forme de Jordan J.
(4) Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit égale à J.
(5) Donner la décomposition de Dunford-Jordan de A.