

Contrôle continu 1

Durée : 1h. Les documents et calculatrices sont interdits.

Connaissances élémentaires (2 points)

Si on augmente une quantité de 10% puis on diminue le résultat de 10%, revient-on à la quantité initiale ? Justifier.

Questions de cours (5 points)

1. Rappeler la définition d'une fonction continue sur \mathbb{R}^d .
2. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout ouvert A de \mathbb{R} , l'ensemble $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in A\}$ est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^d . Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^d .

Exercice 1. (5 points)

1. Rappeler la définition d'une partie ouverte dans \mathbb{R}^d .
2. Montrer, en utilisant la définition d'une partie ouverte, que $]1, 5[$ est ouvert dans \mathbb{R} .
3. Montrer, en utilisant la définition d'une partie ouverte, que

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 < 4\}$$

est ouvert dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 2. (4 points)

On pose

$$f(x, y) = \frac{x \cos(xy^2)}{\ln(x^2 + y^4 + 2)}$$

pour x et y des nombres réels.

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2. Est-ce que f est continue sur D_f ?

Exercice 3. (4 points)

Soient A et B des sous-ensembles de \mathbb{R}^d .

1. On suppose A inclus dans B . Montrer que l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A est inclus dans l'intérieur $\overset{\circ}{B}$ de B . Que dire de la réciproque ?
2. Montrer que la fermeture $\overline{A \cap B}$ de l'intersection de A et de B est incluse dans l'intersection $\overline{A} \cap \overline{B}$. Que dire de la réciproque ?