Université de Rennes

Algèbre

Contrôle du 6/11/23 (Durée : 1h30)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Vrai ou faux.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse "vrai" ou "faux" non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Le sous-ensemble $E = \{(a+b, a-b, b), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Le sous-ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 en 0 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Une base du $\mathbb{R}$-espace vecoriel $\mathbb{C}$ est donnée par $\{1+i, 1-i\}$.
4. Si trois vecteurs u, v, w d'un espace vectoriel sont deux à deux non colinéaires, alors la famille $\{u, v, w\}$ est libre.
5. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
6. Une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ déterminée par l'équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ est donnée par $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$.
7. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1,0,1,0), v = (-1,1,0,-1)$ et $w = (0,1,0,-1)$ est déterminé par l'équation $x_2 + x_4 = 0$.
8. Une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est donnée par $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_1\}$, où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
9. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3)$$
est linéaire.
10. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^9$ telle que $f(e_1) \neq 0$ et $f(e_i) = i f(e_1)$ pour $i \in \{2,3,4\}$, où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Alors la dimension du noyau de f est égale à 3.