UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé rapide du test n°1 (Durée : 40 min)

Question de cours

Sous ces hypothèses, on dit que f ***est équivalente à*** g ***au voisinage de*** a s'il existe une fonction φ, telle que $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$ et que $f(x) = g(x)\varphi(x)$ au voisinage de a.

1 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h des fonctions définies au voisinage de a.

A. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{\sim} 2g(x)$.

Exact : on peut en effet écrire $f(x) = g(x)\varphi(x)$ et $h(x) = g(x)\psi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 1$ et donc $f(x) + h(x) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x)]2g(x)$ avec $\dfrac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x)] \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

B. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors nécessairement $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Faux : par exemple $x^2 + x = \underset{x\to+\infty}{O}(x^2)$ mais n'est pas négligeable devant x^2 en $+\infty$.

C. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ et $h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f(x) + \mu h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.

Exact. En effet, si $|f(x)| \leqslant K\,|g(x)|$ et $|h(x)| \leqslant L\,|g(x)|$ alors, par l'inégalité triangulaire, $|\lambda f(x) + \mu h(x)| \leqslant (|\lambda|\,K + |\mu|\,L)\,|g(x)|$.

2 On a le résultat suivant :

A. $\ell n\,(1+x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$.

Faux : La limite en 0 de $\dfrac{\ell n\,(1+x)}{x}$ est 1 et non pas 0.

B. $\ell n\,(1+x) = \underset{x\to 0}{O}(x)$.

Exact : la quantité $\dfrac{\ell n\,(1+x)}{x}$ a une limite finie en 0 donc est bornée au voisinage de 0.

C. $\ell n\,(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$.

Faux : ces deux quantités n'ont pas la même limite en 0....

D. $\ell n\,(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x + \frac{x^2}{2}$.

Exact : On a $\dfrac{\ell n\,(1+x)}{x + \frac{x^2}{2}} = \dfrac{\ell n\,(1+x)}{x}.\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

3 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 + x + x^3 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On est alors sûr que :

A. $f'(x) = 1 + 3x^2 + x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Faux : Il manque ici l'hypothèse essentielle (voir exemple du cours) que f' admet un D.L. à l'ordre 3 en 0.

B. La dérivée seconde de F en 0 est nulle.

Faux : F est bien deux fois dérivable en 0 mais $F''(0) = f'(0) = 1$.

$\boxed{\textbf{C.} \quad F(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.}$

Exact : Le théorème du cours assure même l'existence d'un DL à l'ordre 5.

$\boxed{4}$ On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $g(x) = x - x^2 + x^3\varepsilon(x)$. On est sûr que :

$\boxed{\textbf{A.} \quad \text{La fonction } f+g \text{ admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.}}$

Exact. En effet, un théorème du cours l'assure.

Dans la pratique, on a $(f+g)(x) = 1 + 3x - 2x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$

B. La fonction fg admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.

Faux : On obtient un développement limité du produit au même ordre 3 et non pas 4.

$\boxed{\textbf{C.} \quad \text{La fonction } \dfrac{g}{f} \text{ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.}}$

Exact. En effet on a $f(0) \neq 0$ et le théorème du cours assure même l'existence en 0 un développement limité à l'ordre 3.

D. La fonction $g \circ f$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

Faux : On a $f(0) \neq 0$ et on ne connait donc rien de $g \circ f$ au voisinage de 0.

$\boxed{5}$ Le développement limité de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \cos x}$ à l'ordre 2 en 0 est :

$\boxed{\textbf{A.} \quad \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$

B. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Aucun des deux résultats précédents.

En effet, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X + X\varepsilon_2(X)$ donc, par substitution $f(x) = \sqrt{2\left(1 - \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_1(x)\right)} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{6}$ La limite lorsque x tend vers 0^+ de $\dfrac{\sin(2x)}{1 - \sqrt{1+x}}$ est :

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** $\boxed{-4.}$ **D.** 0.

On peut même ici se passer des DL pour déterminer cette limite. On écrit : $\dfrac{\sin(2x)}{1 - \sqrt{1+x}} = -2.\dfrac{\sin(2x)}{2x}.\left(1 + \sqrt{1+x}\right)$ et on utilise le résultat connu $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ (où $X = 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$).