UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 25/09/20 (Durée : 40 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :

- Question de cours : 2 points.
- QCM : dans chacun des sept cas :
  - 2 points par affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.

Question de cours

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Donner la définition de f est équivalente à g au voisinage de a (que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$).

QCM : Dans chacun des six cas ci-dessous, entourer **la ou les** affirmations exactes.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h des fonctions définies au voisinage de a.

A. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{\sim} 2g(x)$.

B. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors nécessairement $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

C. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ et $h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f(x) + \mu h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ On a le résultat suivant :

A. $\ell n\,(1 + x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$.

B. $\ell n\,(1 + x) = \underset{x\to 0}{O}(x)$.

C. $\ell n\,(1 + x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$.

D. $\ell n\,(1 + x) \underset{x\to 0}{\sim} x + \frac{x^2}{2}$.

$\boxed{3}$ Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 + x + x^3 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On est alors sûr que :

A. $f'(x) = 1 + 3x^2 + x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

B. La dérivée seconde de F en 0 est nulle.

C. $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

$\boxed{4}$ On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $g(x) = x - x^2 + x^3\varepsilon(x)$. On est sûr que :

A. La fonction $f + g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.

B. La fonction fg admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.

C. La fonction $\dfrac{g}{f}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

D. La fonction $g \circ f$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

$\boxed{5}$ Le développement limité de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \cos x}$ à l'ordre 2 en 0 est :

A. $\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Aucun des deux résultats précédents.

$\boxed{6}$ La limite lorsque x tend vers 0^+ de $\dfrac{\sin(2x)}{1 - \sqrt{1 + x}}$ est :

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 0.