UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé rapide du test n°1 (Durée : 40 min)

Question de cours

Sous ces hypothèses, on dit que f ***est négligeable devant*** $g(x)$ ***quand*** x ***tend vers*** a s'il existe une fonction ϵ, telle que $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ et que $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ au voisinage de a.

1 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h des fonctions définies au voisinage de a.

A. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Exact : on peut en effet écrire $f(x) = g(x)\varphi(x)$ et $h(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et donc $f(x) + h(x) = [\varphi(x) + \varepsilon(x)]g(x)$ avec $\varphi(x) + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

B. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ et $h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors nécessairement $f(x) + h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.

Exact. En effet, si $|f(x)| \leqslant K\,|g(x)|$ et $|h(x)| \leqslant L\,|g(x)|$ alors, par l'inégalité triangulaire, $|f(x) + h(x)| \leqslant (K + L)\,|g(x)|$.

C. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors nécessairement $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Faux : par exemple $x^2 + x = \underset{x\to+\infty}{O}(x^2)$ mais n'est pas négligeable devant x^2 en $+\infty$.

2 On a le résultat suivant :

A. $\sin x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.

Faux : La limite en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$ est 1 et non pas 0.

B. $\cos x = \underset{x\to 0}{O}(x)$.

Faux : $|\cos x| \leqslant K\,|x|$ entraînerait $\lim_{x\to 0} \cos x = 0\ldots$

C. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x^2$.

Exact : ces deux quantités ont pour limite $1 \neq 0$ en 0.

D. $\sqrt{e^x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : On a $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{8}X^2 + o(X^2)$ donc on a en fait

$$\sqrt{e^x} = T_4\left(1 + \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) - \frac{1}{8}(x + \frac{x^2}{2})^2\right) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

3 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 + 2x + 4x^3 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On est alors sûr que :

A. $f'(x) = 2 + 12x^2 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Faux : Le théorème du cours ne donnerait (éventuellement !) qu'un développement limité à l'ordre 3.

$\boxed{\textbf{B.}\quad F(x) = x + x^2 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.}$

Exact : Le théorème du cours assure même l'existence d'un DL à l'ordre 5.

C. La dérivée seconde de F en 0 est nulle.

Faux : F est bien deux fois dérivable en 0 mais $F''(0) = f'(0) = 2$.

$\boxed{4}$ On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 2x - x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $g(x) = x - x^2 + x^3\varepsilon(x)$. On est sûr que :

A. La fonction $f + g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.

Faux : On obtient un développement limité de la somme au même ordre 3 et non pas 4.

$\boxed{\textbf{B.}\quad \text{La fonction } fg \text{ admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.}}$

Exact. En effet, même si le théorème du cours ne donne que l'ordre 3, on peut ici mettre x en facteur dans les DL de f et de g. Dans la pratique, on a $(fg)(x) = 2x^2 - 3x^3 + 2x^4 + x^4\varepsilon(x)$

$\boxed{\textbf{C.}\quad \text{La fonction } \dfrac{f}{g} \text{ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.}}$

Exact. En effet on a, après simplification, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)}{1 - x + x^2\varepsilon(x)}$ et, comme le dénominateur ne s'annule pas en 0, le théorème du cours permet de conclure que $\dfrac{f}{g}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

D. La fonction $f \circ g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.

Faux : On a bien $g(0) = 0$ mais on obtient un développement limité de la composée au même ordre 3 et non pas 4.

$\boxed{5}$ Le développement limité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 - \sin x}$ à l'ordre 2 en 0 est :

A. $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{C.}\quad \text{Aucun des deux résultats précédents.}}$

En effet, $\sin x = x + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\dfrac{1}{1 - X} = 1 + X + X^2 + X^2\varepsilon_2(X)$ donc, par substitution (puisque $\sin(0) = 0$), $f(x) = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{6}$ La limite lorsque x tend vers 1^- de $\dfrac{\sin(2\ell n\, x)}{1 - x}$ est :

A. $+\infty$. $\boxed{\textbf{B.}\quad -2.}$ **C.** 0. **D.** 1.

On peut même ici se passer des DL pour déterminer cette limite. On écrit : $\dfrac{\sin(2\ell n\, x)}{1 - x} = -2.\dfrac{\sin(2\ell n\, x)}{2\ell n\, x}.\dfrac{\ell n\, x}{x - 1}$ et on utilise les résultats connus $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ell n\, x}{x - 1} = 1$ ainsi que $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ (où $X = 2\ell n\, x \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$).