UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 24/09/19 (Durée : 40 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :

- Question de cours : 2 points.
- QCM : dans chacun des sept cas :
  - 2 points par affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.

Question de cours

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Donner la définition de f est négligeable devant g au voisinage de a (que l'on note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$).

QCM : Dans chacun des six cas ci-dessous, entourer **la ou les** affirmations exactes.

$\boxed{1}$ Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h des fonctions définies au voisinage de a.

A. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

B. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ et $h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors nécessairement $f(x)+h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.

C. Si $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, alors nécessairement $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

$\boxed{2}$ On a le résultat suivant :

A. $\sin x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.

B. $\cos x = \underset{x\to 0}{O}(x)$.

C. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x^2$.

D. $\sqrt{e^x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 + 2x + 4x^3 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On est alors sûr que :

A. $f'(x) = 2 + 12x^2 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

B. $F(x) = x + x^2 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

C. La dérivée seconde de F en 0 est nulle.

$\boxed{\mathbf{4}}$ On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 2x - x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $g(x) = x - x^2 + x^3\varepsilon(x)$. On est sûr que :

A. La fonction $f + g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.

B. La fonction fg admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.

C. La fonction $\dfrac{f}{g}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

D. La fonction $f \circ g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 4.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Le développement limité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 - \sin x}$ à l'ordre 2 en 0 est :

A. $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Aucun des deux résultats précédents.

$\boxed{\mathbf{6}}$ La limite lorsque x tend vers 1^- de $\dfrac{\sin(2\ell n\, x)}{1 - x}$ est :

A. $+\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 1.